

УДК: 51

DOI 10.21661/r-118174

*А.С. Зеленый, А.В. Бунякин*

## О МЕТОДЕ АППРОКСИМАЦИИ ПЛОСКОЙ ЗАМКНУТОЙ КРИВОЙ С ОСТРОЙ КРОМКОЙ

***Аннотация:** в статье отмечено, что первоначально проблема интерполяции кривой на плоскости возникла в задаче обтекания профиля крыла набегающим потоком жидкости (газа) и в последующем расчете потенциала скоростей методом граничных элементов. Однако, как оказалось, практическая значимость данного метода далеко этим не ограничивается. Данный алгоритм может быть с успехом применен в любой задаче, в которой требуется задание дискретного набора точек, описывающих произвольную кривую: метод базисных потенциалов в решении краевых задач, обтекание профилей с острой кромкой (профиль крыла, капля жидкости и т. п.), аналитическое выражение, для которых получить порой очень сложно, создание шрифтов и логотипов, а также в некоторых задачах архитектуры и швейной промышленности.*

***Ключевые слова:** сплайн-интерполяция на плоскости, аппроксимация крылового профиля, задача обтекания.*

*A.S. Zelenyi, A.V. Bunyakin*

## ABOUT THE METHOD OF APPROXIMATION OF A SIMPLE CLOSED PLANE CURVE WITH A SHARP EDGE

***Abstract:** it was noted in the article, that initially the problem of interpolation of the simple plane curve arose in the problem of simulation of subsonic flow around a body with the subsequent calculation of the velocity potential using the vortex panel method. However, as it turned out, the practical importance of this method is much wider. This algorithm can be successfully applied in any task that requires a discrete set of points which describe an arbitrary curve: potential function method, flow around an airfoil with the trailing edge (airfoil, liquid drop, etc.), analytic expression, which*

is very difficult to obtain, creation of the font and logo and in some tasks of architecture and garment industry.

**Keywords:** complex spline interpolation, an airfoil approximation, flow around a body.

В данной работе будет подробно описан алгоритм интерполяции замкнутой кривой с острой кромкой. Один из примеров такой кривой показан на рисунке 1.

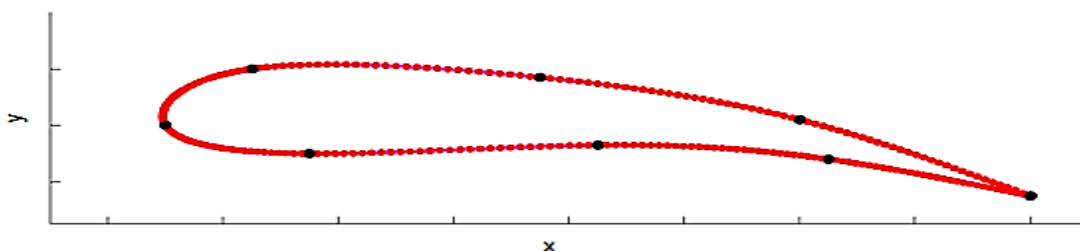


Рис. 1. Пример замкнутой кривой с острой кромкой

Как видно из рисунка 1 – все точки замкнутой кривой должны лежать в одной плоскости, причем в одной из этих точек (острая кромка) нарушается условие гладкости.

На примере интерполяции профиля крыла с острой задней кромкой (как на рис. 1) опишем данный алгоритм. Общая постановка задачи заключается в следующем – на плоскости заданы *опорные точки*, задающие «каркас» нашей замкнутой кривой ( $z_0 = z_n$  – острая кромка) (рисунок 2); требуется построить кусочно-кубическую функцию, интерполирующую данные опорные точки. Везде далее будет рассматриваться комплексная плоскость, что никак не влияет на суть данного метода. Будем использовать наиболее известный и широко применяемый интерполяционный сплайн степени 3 дефекта 1. Также будем исходить из предположения, что узлы сплайна

$$a = p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n = b, [a, b] \in \mathbb{R}$$

одновременно служат узлами интерполяции, т.е. в них известны значения функции  $z_k := z(p_k) \in \mathbb{C}, k = 0, 1, \dots, n$ , причем  $z_0 = z_n$  (условие касания профиля) (рисунок 2).

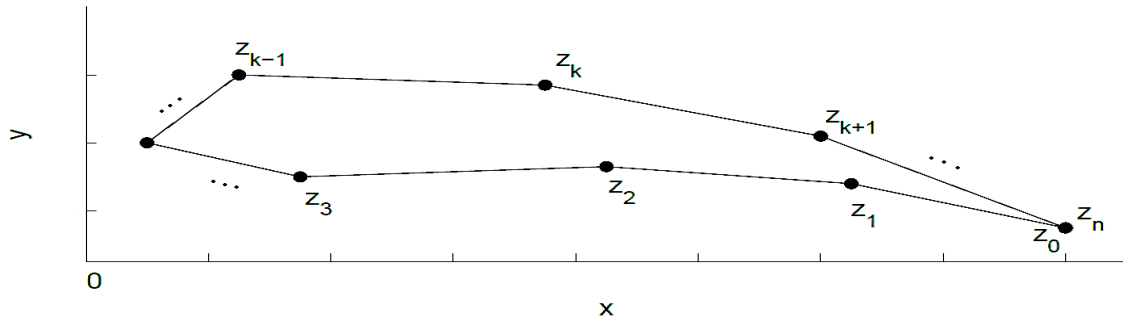


Рис. 2. Набор опорных точек, задающих сглаживаемую кривую.

$$z_0 = z_n - \text{острая кромка}$$

*Определение.* Кубическим комплексным сплайном, интерполирующим на отрезке  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  данную комплекснозначную функцию  $z(p)$ , называется функция

$$S(p) := \left\{ \begin{aligned} s_k(p) &:= a_k + b_k(p - p_k) + c_k(p - p_k)^2 + d_k(p - p_k)^3 \\ p &\in [p_{k-1}, p_k] \subset \mathbb{R}; a_k, b_k, c_k, d_k \in \mathbb{C} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$k = 1, 2, \dots, n,$$

удовлетворяющая совокупности условий:

1) (условие интерполяции в узлах сплайна)

$$s_k(p_k) = z_k, k = 1, \dots, n$$

2) (условия гладкой стыковки звеньев сплайна)

$$\left. \begin{aligned} s_{k-1}(p_{k-1}) &= s_k(p_{k-1}) \\ s'_{k-1}(p_{k-1}) &= s'_k(p_{k-1}) \\ s''_{k-1}(p_{k-1}) &= s''_k(p_{k-1}) \end{aligned} \right\} k = 2, 3, \dots, n$$

3) (условия слияния профиля в точке  $z_0 = z_n$ )

$$s_1(p_0) = s_n(p_n)$$

$$s'_1(p_0) = s'_n(p_n)$$

$$s''_1(p_0) = s''_n(p_n)$$

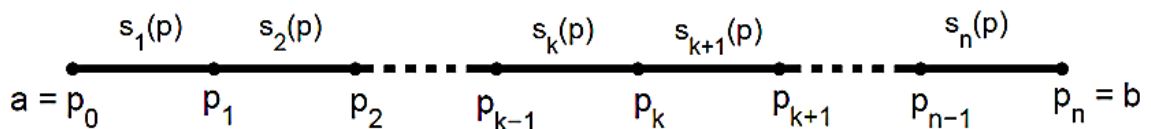


Рис. 3. Расположение узлов и звеньев кубического сплайна (1)

На рисунке 3 показана наглядная структура звеньев сплайна.

Как видим, условий оказалось  $4n$  – ровно столько, сколько неизвестных коэффициентов. Теперь подставим сюда выражения функций

$$s_k(p) = a_k + b_k(p - p_k) + c_k(p - p_k)^2 + d_k(p - p_k)^3,$$

и их производных

$$s'_k(p) = b_k + 2c_k(p - p_k) + 3d_k(p - p_k)^2,$$

$$s''_k(p) = 2c_k + 6d_k(p - p_k),$$

Полагая для краткости

$$h_k = p_k - p_{k-1},$$

получаем детализированную систему связей

$$\left\{ \begin{array}{l} a_k = z_k, k = 1, 2, \dots, n \\ a_{k-1} = a_k - b_k h_k + c_k h_k^2 - d_k h_k^3, \\ b_{k-1} = b_k - 2c_k h_k + 3d_k h_k^2, \\ c_{k-1} = c_k - 3d_k h_k, \end{array} \right\} \text{ при } k = 2, 3, \dots, n$$

$$(1.2)$$

$$(1.3)$$

$$(1.4)$$

$$(1.5)$$

$$a_1 - b_1 h_1 + c_1 h_1^2 - d_1 h_1^3 = a_n, \quad (1.6)$$

$$b_1 - 2c_1 h_1 + 3d_1 h_1^2 = -b_n, \quad (1.7)$$

$$c_1 - 3d_1 h_1 = -c_n. \quad (1.8)$$

Далее ставится задача нахождения коэффициентов сплайна (1)  $a_k, b_k, c_k, d_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) из этой линейной для них системы (1.2)–(1.8). С этой целью исключим из системы неизвестные  $a_k, b_k, d_k$  и сведем все к решению системы относительно неизвестных  $c_k$ .

Предоставим читателю самому вывести формулы для расчета этих коэффициентов, либо воспользоваться литературой [2], в которой подробно описаны все дальнейшие шаги. Здесь приведем лишь конечную формулу для нахождения коэффициентов  $c_k$ :

$$h_{k-1}c_{k-2} + 2(h_{k-1} + h_k)c_{k-1} + h_k c_k = 3 \left( \frac{z_k - z_{k-1}}{h_k} - \frac{z_{k-1} - z_{k-2}}{h_{k-1}} \right) \quad (2)$$

$$k = 2, 3, \dots, n$$

*Замечание:* при  $k = 2$  в (2) участвует коэффициент  $c_0$ , который мы положили равным нулю (т. н. фиктивный коэффициент). Для использования метода прогонки для систем с трехдиагональной матрицей коэффициентов необходимо также равенство нулю и коэффициента  $c_n$ . Поэтому полагаем в начале  $c_n = 0$ , а затем выражаем его из (1.8):  $c_n = 3d_1 h_1 - c_1$ . При расчете коэффициентов отбрасывается соотношение (1.7) (оно и очевидно, так как производной в точке кас-

ния не существует). Данное опущение никак не влияет на последующие результаты. В этом случае кубический сплайн (1), оставаясь интерполяционным дефекта 1, утрачивает лишь свойство быть естественным [2].

Стоит также заметить, что  $|2h_{k-1} + 2h_k|$  заведомо больше, чем  $|h_{k-1}| + |h_k|$ , а значит, выполняется достаточное условие однозначной разрешимости, т.е. существует единственный набор коэффициентов  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , удовлетворяющий (2). Вектор свободных членов системы (2) является комплексным, в то время как сама матрица – вещественная. Однако можно воспользоваться свойством линейности СЛАУ и решить отдельно две чисто вещественные системы, а уже из их решений получить вектор комплексных коэффициентов.

Преимуществом данного метода является возможность свободного варьирования опорных точек для получения кривой произвольной формы, а также возможность произвольно задавать количество получаемых точек между любыми двумя узлами сплайна.

В качестве демонстрации надежности и эффективности данного метода были аппроксимированы несколько известных крыловых профилей (NASA-2212, F-2, Gettlingen-495M). Опорные точки для этих профилей были скачаны из сетевого ресурса [3]. На рисунке 4 представлены все три профиля: черные (темные) точки – точки оригинального профиля, красные – точки, полученные в результате интерполяции. Размеры профилей представлены в относительных единицах.

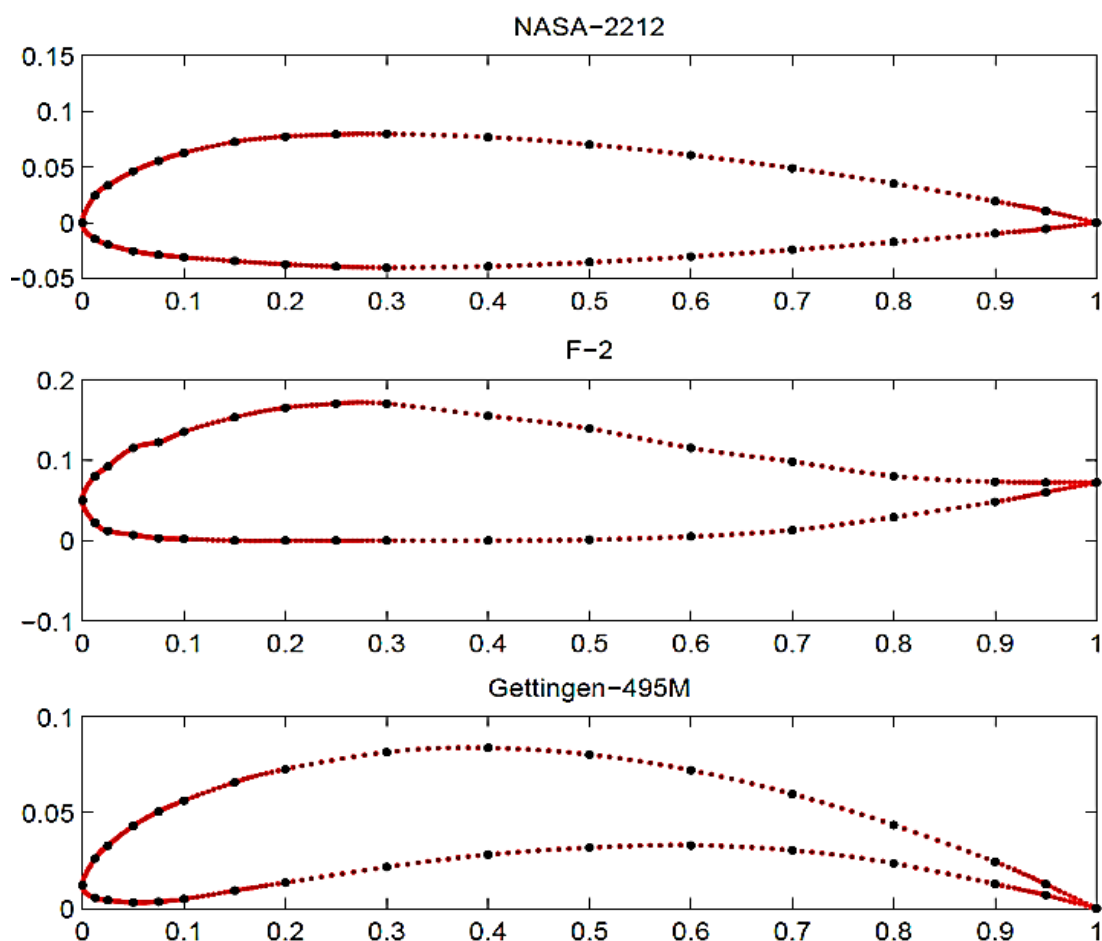


Рис. 4. Крыловые профили

### *Список литературы*

1. Зеленый А.С. Обтекание профиля с зоной отрыва // Выпускная квалификационная работа бакалавра (научный руководитель: Лежнев В.Г.).
2. Вержбицкий В.М. Основы численных методов: Учебник для вузов – М.: Высшая школа, 2002, – 441 с.
3. Справочник авиационных профилей [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://kipla.kai.ru/liter/Spravochnic\\_avia\\_profiley.pdf](http://kipla.kai.ru/liter/Spravochnic_avia_profiley.pdf)

---

**Зеленый Андрей Сергеевич** – магистрант факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет», Россия, Краснодар.

**Zelenyi Andrey Sergeevich** – graduate student of the Faculty of Mathematics and Computer Sciences FSBEI of HE “Kuban State University”, Russia, Krasnodar.

**Бунякин Алексей Вадимович** – кандидат физ.-мат. наук, преподаватель кафедры математических и компьютерных методов ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет», Россия, Краснодар.

**Bunyakin Alexey Vadimovich** – candidate of physical and mathematical sciences, lecturer of the Department of Mathematical and Computer Methods FSBEI of HE “Kuban State University”, Russia, Krasnodar.

---