

УДК 537.533, 535.31

DOI 10.21661/r-119489

**И.Ф. Спивак-Лавров, А.Г. Дуйсенова, Г.Е. Гилимова**

## РАСЧЕТ ПОЛЯ ТРЕХЭЛЕКТРОДНОЙ ТРАНСАКСИАЛЬНОЙ ЛИНЗЫ

**Аннотация:** в исследовании применен метод расчета трансаксиальных полей, основанный на разбиении потенциала на два слагаемых. Основное слагаемое является гармонической функцией двух переменных и удовлетворяет заданным граничным условиям. Гармоническая составляющая потенциала находится аналитически с помощью методов ТФКП. Второе слагаемое является решением неоднородного уравнения с нулевыми граничными условиями Дирихле и может быть найдено численно с необходимой точностью.

**Ключевые слова:** трансаксиальная электростатическая линза, стигматический режим фокусировки.

**I.F. Spivak-Lavrov, A.G. Duisenova, G.E. Gilimova**

## THE CALCULATION OF THE FIELD OF THE THREE-ELECTRODE TRANSAXIAL LENS

**Abstract:** the article offered method of the calculation of the transaxial fields based on the partition of the potential into two terms. The main term is a harmonic function of two variables and satisfies the given boundary conditions. The harmonic component of the potential is found analytically using the methods of complex analysis. The second term is the solution of an inhomogeneous equation with zero Dirichlet boundary conditions and can be found numerically with the required accuracy.

**Keywords:** transaxial electrostatic lens, stigmatic focus mode.

### Введение

Обычно электростатические поля трансаксиальных и осесимметричных корпускулярно-оптических систем описываются в цилиндрической системе координат  $\rho$ ,  $\psi$ ,  $z$ . Уравнение Лапласа для потенциала  $\varphi$  в цилиндрических координатах имеет вид:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

В случае трансаксиальных и осесимметричных систем потенциал электростатического поля  $\varphi$  зависит только от переменных  $\rho, z$  и удовлетворяет уравнению:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (2)$$

Наиболее общим методом решения граничных задач для уравнения (2) является стандартный метод разделения переменных [1]. При этом потенциал представляется в виде рядов функций Бесселя. Однако эти ряды обычно плохо сходятся и неудобны для проведения численного расчета траекторий частиц (см., например, [2]). В монографии [3] также рассмотрены различные аналитические методы решения уравнения (2) для трансаксиальных и осесимметричных полей.

В настоящей работе используется метод расчета потенциалов осесимметричных и трансаксиальных систем, предложенный в работе [4]. Гармоническая составляющая электростатического потенциала  $\varphi(\eta, \zeta)$  удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа и являются гармонической функцией переменных

$$\eta = \ln \frac{\rho}{R}, \quad \zeta = \frac{z}{R}, \quad (3)$$

где  $R$  – постоянная, имеющая размерность длины. Поэтому для расчета  $\varphi(\eta, \zeta)$  можно использовать аппарат теории функций комплексной переменной (ТФКП) [5]. Полученное таким образом аналитическое выражение для потенциала дает хорошее приближение для решения реальных задач, так как точно удовлетворяет заданным граничным условиям Дирихле. В то же время аналитическое решение удобно использовать для расчета корпускулярно-оптических систем, обладающих соответствующей симметрией.

В работе [6] этот метод применен для расчета иммерсионной двухэлектродной трансаксиальной линзы. В ряде приборов, например, в призмённых спектрометрах заряженных частиц могут быть использованы также и одиночные линзы. Простейшей одиночной электростатической трансаксиальной линзой является

трехэлектродная линза, на входе и на выходе которой потенциалы электродов одинаковы.

Трехэлектродная трансаксиальная линза схематически изображена на рис. 1, где показана также сопутствующая декартова система координат  $x, y, z$ . Трансаксиальная линза представляет собой две параллельные пластины, разрезанные прямыми круговыми цилиндрами радиуса  $R_1$  и  $R_2$ , ось которых совпадает с осью  $z$ .

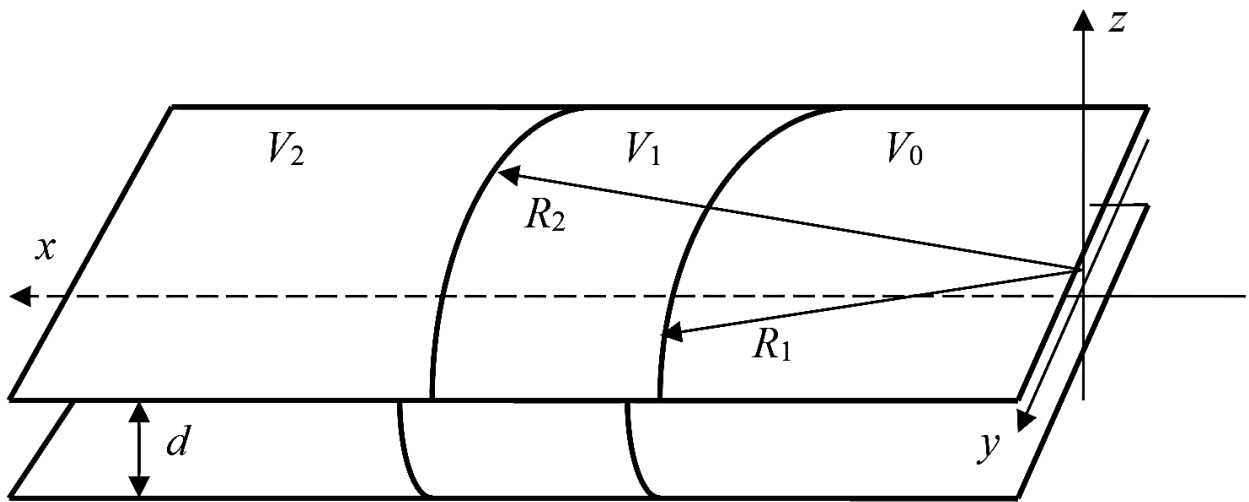


Рис. 1. Схематическое изображение трансаксиальной линзы

Начало декартовой системы координат находится в средней плоскости линзы, совпадающей с плоскостью  $xy$ ;  $V_0$ ,  $V_1$  и  $V_2$  — потенциалы электродов,  $d$  — расстояние между пластинами. Зазоры между электродами считаются бесконечно узкими. Вдали от краев пластин электростатический потенциал  $\varphi$  зависит только от переменных  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  и  $z$ . Вводя безразмерные переменные  $\eta$  и  $\zeta$  согласно формулам (1), где

$$R = \sqrt{R_1 R_2}, \quad (4)$$

получим следующее уравнение для потенциала:

$$e^{-2\eta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} = 0. \quad (5)$$

В плоскости  $\eta \zeta$  потенциал  $\varphi(\eta, \zeta)$  удовлетворяет следующим граничным условиям при  $\zeta = \pm \zeta_0 = \pm \frac{d}{2R}$ :

$$\varphi(\eta, \pm \zeta_0) = \begin{cases} V_0 & \text{для } \eta < -\eta_0, \\ V_1 & \text{для } -\eta_0 < \eta < \eta_0, \\ V_2 & \text{для } \eta > \eta_0. \end{cases} \quad (6)$$

В последней формуле  $\eta_0 = \ln \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$ .

Уравнение (5) для потенциала можно решать методом последовательных приближений, взяв за нулевое приближение гармоническую функцию  $F(\eta, \zeta)$ , удовлетворяющую граничным условиям (6).

В плоскости  $\eta \zeta$  имеем электростатическую систему с двумерным полем, изображенную на рис. 2. На этом рисунке система электродов расположена симметрично относительно осей декартовой системы координат  $\eta, \zeta$ .

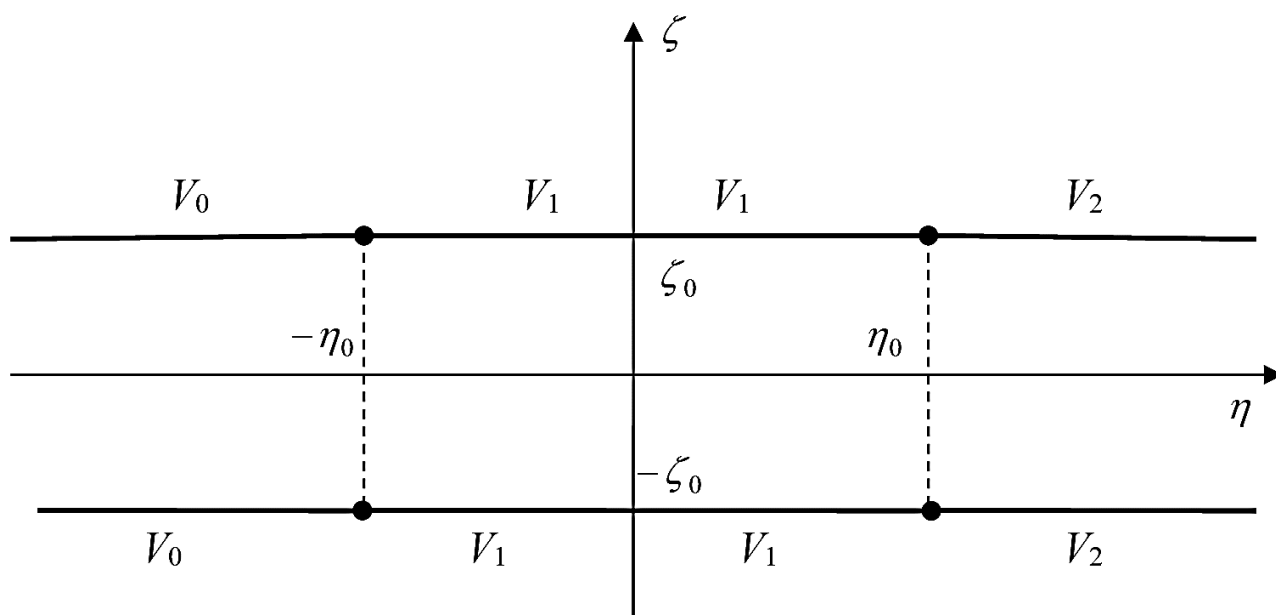


Рис. 2. Трехэлектродная электростатическая система с двумерным полем

Чтобы найти потенциал поля  $\varphi(\eta, \zeta)$  этой системы, отображим полосу  $-\zeta_0 \leq \zeta \leq \zeta_0$  комплексной плоскости  $\omega = \eta + i\zeta$  на верхнюю полуплоскость плоскости  $w = u + iv$  с помощью следующего конформного преобразования:

$$w = -i \exp\left(\frac{\pi R \omega}{d}\right). \quad (7)$$

Откуда

$$u = -\exp\left(\frac{\pi R \eta}{d}\right) \sin\left(\frac{\pi R \zeta}{d}\right), \quad v = \exp\left(\frac{\pi R \eta}{d}\right) \cos\left(\frac{\pi R \zeta}{d}\right). \quad (8)$$

В  $w$ -плоскости получаем граничную задачу, представленную на рис. 3, где верхним электродам соответствует область  $u < 0$ , а нижним –  $u > 0$ .

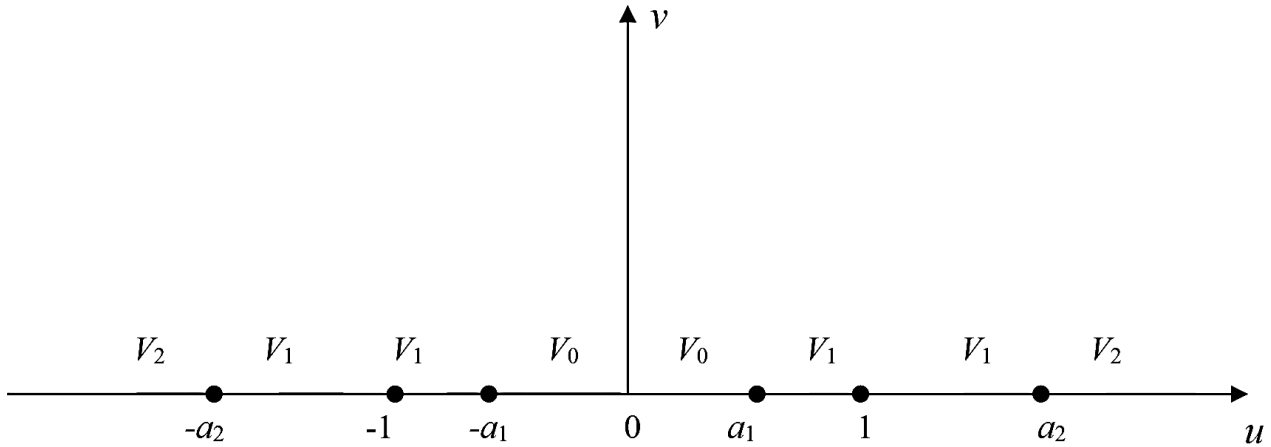


Рис. 3. Граничная задача в  $w$ -плоскости

Распределение потенциала в  $w$ -плоскости определяется следующим выражением:

$$F(u, v) = V_2 - \frac{V_2 - V_1}{\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{u + a_2}{v} - \operatorname{arctg} \frac{u - a_2}{v} \right) - \frac{V_1 - V_0}{\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{u + a_1}{v} - \operatorname{arctg} \frac{u - a_1}{v} \right). \quad (9)$$

Здесь

$$a_1 = \exp\left(-\frac{\pi R \eta_0}{d}\right), \quad a_2 = \frac{1}{a_1} = \exp\left(\frac{\pi R \eta_0}{d}\right), \quad (10)$$

Таким образом, получено аналитическое выражение для электростатического потенциала трехэлектродной трансаксиальной линзы.

Уравнения движения заряженной частицы с зарядом  $q$  и массой  $m$  в безразмерных декартовых координатах  $x$ ,  $y$ ,  $z$  можно записать в следующем виде:

$$\ddot{x} = \Phi_x, \quad \ddot{y} = \Phi_y, \quad \ddot{z} = \Phi_z. \quad (11)$$

Здесь  $\Phi = \varphi/V_0$  – безразмерный потенциал, за единицу длины берется величина  $d$  – расстояние между плоскостями, индексы у  $\Phi$  обозначают частные производные по соответствующим координатам, точки обозначают производные по безразмерному времени  $\tau = t/\tau_0$ , где

$$\tau_0 = d \sqrt{\frac{m}{qV_0}}. \quad (12)$$

Начальные условия для расчета трансаксиальной линзы с помощью уравнений (9) можно задать следующим образом:

$$x_0 = l, \quad y_0 = z_0 = 0; \quad \dot{x}_0 = \sqrt{2 - \dot{y}_0^2 - \dot{z}_0^2}, \quad \dot{y}_0 = \alpha, \quad \dot{z}_0 = \beta. \quad (13)$$

Найдем также частные производные потенциалов, входящих в уравнения (9):

$$\Phi_x = \left( F_u \frac{\partial u}{\partial \eta} + F_v \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (14)$$

$$\Phi_y = \left( F_u \frac{\partial u}{\partial \eta} + F_v \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y}, \quad (15)$$

$$\Phi_z = \left( F_u \frac{\partial u}{\partial \zeta} + F_v \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) \frac{d\zeta}{dz}. \quad (16)$$

Частные производные, входящие в (14) – (16), согласно (3), (8), (9) определяются следующими выражениями:

$$F_u = -\frac{v^2}{\pi} \left\{ (V_2 - V_1) \left[ \frac{1}{v^2 + (u + a_2)^2} - \frac{1}{v^2 + (u - a_2)^2} \right] + (V_1 - V_0) \left[ \frac{1}{v^2 + (u + a_1)^2} - \frac{1}{v^2 + (u - a_1)^2} \right] \right\}, \quad (17)$$

$$F_v = \frac{1}{\pi} \left\{ (V_2 - V_1) \left[ \frac{u + a_2}{v^2 + (u + a_2)^2} - \frac{u - a_2}{v^2 + (u - a_2)^2} \right] + (V_1 - V_0) \left[ \frac{u + a_1}{v^2 + (u + a_1)^2} - \frac{u - a_1}{v^2 + (u - a_1)^2} \right] \right\}; \quad (18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\pi R}{d} u, \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\pi R}{d} v, \quad \frac{\partial u}{\partial \zeta} = -\frac{\pi R}{d} v, \quad \frac{\partial v}{\partial \zeta} = -\frac{\pi R}{d} u; \quad (19)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho^2}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho^2}, \quad \frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{R}. \quad (20)$$

Численно интегрируя уравнения (11) можно подобрать  $R_1$  и  $R_2$ , а также потенциалы электродов, при которых осуществляется стигматическая фокусировка объемного пучка заряженных частиц, выходящих из точечного ионного источника.

### Список литературы

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 736 с.

2. Овсянникова Л.П. Цилиндрический зеркальный энергоанализатор с закрытыми торцами / Л.П. Овсянникова, Т.Я. Фишкова // ЖТФ. – 1994. – Т. 64. – №10. – С. 174–177с.
3. Голиков Ю.К. Теория синтеза электростатических энергоанализаторов / Ю.К. Голиков, Н.К. Краснова. – СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2010. – 409 с.
4. Doskeyev G.A. Method of the calculation of the transaxial lens' field / G.A. Doskeyev, I.F. Spivak-Lavrov // Eurasian Physical Technical Journal. – 2008. – Vol. 5. – №1(9). – P. 50–52.
5. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А.Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
6. Doskeev G.A. Method of the calculation of transaxial lens' field / G.A. Doskeev, I.F. Spivak-Lavrov // Eurasian Physical Technical Journal. – Vol. 5. – 2008. – №1 (9). – P. 50–53.

---

**Спивак-Лавров Игорь Феликсович** – д-р физ.-мат. наук, профессор Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова, Республика Казахстан, Актобе.

**Spivak-Lavrov Igor Feliksovich** – doctor of physical and mathematical sciences, professor of K. Zhubanov Aktobe Regional State University, the Republic of Kazakhstan, Aktobe.

**Дуйсенова Айнур Гайсиевна** – магистрант Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова, Республика Казахстан, Актобе.

**Duisenova Ainur Gaisievna** – graduate student of K. Zhubanov Aktobe Regional State University, the Republic of Kazakhstan, Aktobe.

**Гилимова Гульдана Ержанкызы** – магистрант Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Республика Казахстан, Актобе.

**Gilimova Guldana Erzhankyzy** – graduate student of K. Zhubanov Aktobe Regional State University, the Republic of Kazakhstan, Aktobe.

---