

УДК 518.6+519.95

DOI 10.21661/r-130310

Б.И. Эсанбаев, А.А. Ибрагимов

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ВНЕШНЕЙ БАЛЛИСТИКИ
В УСЛОВИЯХ ИНТЕРВАЛЬНОЙ
НЕДЕТЕРМИНИРОВАННОСТИ ДАННЫХ**

Аннотация: в данной статье рассматривается один из вариантов основной задачи внешней баллистики в условиях интервальной недетерминированности параметров. Предполагается, что начальные данные заданы неточно, т.е. их возможные значения принадлежат к некоторому интервалу. Разработан алгоритм решения поставленной задачи в рамках интервального анализа и получены оценки ширины интервального решения.

Ключевые слова: внешняя баллистика, баллистический коэффициент, недетерминированность, интервальная функция, ширина интервала.

B.I. Esanbaev, A.A. Ibragimov

**SIMULATION OF THE MAIN OBJECTIVE OF EXTERNAL BALLISTICS
UNDER THE INTERVAL NON-DETERMINATION OF BASIC DATA**

Abstract: this article describes one of options of the main objective of external ballistics under the interval non-determination of parameters. It is supposed that initial data has been set inaccurately, i.e. their possible values belong to some interval. The algorithm of the solution of an objective within the interval analysis has been developed. The evaluation of the interval decision width has been obtained.

Keywords: external ballistics, ballistic coefficient, non-determination, interval function, interval width.

1. Введение.

Существенную роль в пространственном положении траектории снаряда играют многочисленные случайные или не учитываемые в уравнениях движения

факторы. К числу первых относятся, например, отклонения масс снарядов от номинального значения, вызванные технологическими погрешностями; массовая и химическая неоднородность зарядов; изменение метеорологических условий.

Известно, что интервальные методы в ряде случаев позволяют не только адекватно описать явления и процессы, где недетерминированные величины в рамках исчисления интервалов могут быть начальными и выходными параметрами, но и определять содержательные интерпретации для полученных в интервальной форме решений.

Методы интервального анализа позволяют получить апостериорную двустороннюю аппроксимацию искомого точного решения и одновременно учитывать влияние нескольких или всех источников погрешностей на конечный результат решаемой задачи. Применение интервальных методов на этапах формализации задачи, построения или синтеза соответствующей математической модели, а также для изучения взаимовлияния точечных и/или недетерминированных параметров, актуально как с теоретической, так и с практической стороны.

2. Вариант постановки основной задачи внешней баллистики.

При решении основной задачи внешней баллистики полагают, что ось снаряда совпадает с касательной, имея в виду то, что для решения целого ряда практических задач вполне достаточно знать движение одного центра массы снаряда и основываются на том, что в большинстве случаев угол, составляемый осью снаряда с касательной к траектории невелик.

Рассмотрим систему [1]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -c H(y) G(v) u, & \frac{dx}{dt} &= u, \\ \frac{dw}{dt} &= -c H(y) G(v) w - g, & \frac{dy}{dt} &= w, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= 0, & y(0) &= 0, \\ u(0) &= v_0 \cos \theta_0, & w(0) &= v_0 \sin \theta_0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где $v = \sqrt{u^2 + w^2}$.

В системе (1): x - дальность полета, y - высота полета, u , w - горизонтальная и вертикальная составляющие скорости движения центра масс снаряда, c – баллистический коэффициент, $H(y)$ – закон изменения плотности с высотой $G(v) = v^{-1}F(v)$, $F(v)$ – закон сопротивления, θ – угол, составляемый касательной к траектории с горизонтом.

Баллистический коэффициент c выражается следующим образом:

$$c = \frac{id^2}{q} \cdot 10^3 \cdot \frac{P_0}{P_{0N}}, \quad (3)$$

где i – коэффициент формы снаряда; P_0 – плотность воздуха, измеренная в единицах веса на единицу объема у поверхности земли; P_{0N} – нормальная плотность воздуха, измеренная в единицах веса на единицу объема у поверхности земли; d - калибр снаряда, q - вес снаряда. Закон сопротивления связан с $k(v/a)$ – эталонным коэффициентом:

$$F(v) = 4.74 \cdot 10^{-4} \cdot v^2 k \left(\frac{v}{a} \right), \quad (4)$$

а

$$H(y) = \frac{\tau_{0N}}{\tau} e^{-\frac{1}{R} \int_0^y \frac{dy}{\tau}} = \frac{\tau_{0N}}{\tau} \left(\frac{\tau_{0N}}{\tau} \right)^{\frac{1}{RG}} = \tau^{\frac{1}{RG}-1} \tau_{0N}^{1-\frac{1}{RG}}, \quad (5)$$

где $\tau = \tau_{0N} - G(y) = 288^0 - 0.006328y$ – виртуальная температура и газовая постоянная $R = 29.27$.

Подставляя правые части (3), (4), (5) в (1) получим

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{id^2}{q} \cdot 10^3 \cdot \frac{P_0}{P_{0N}} \cdot \frac{\tau_{0N}}{\tau} \cdot e^{-\frac{1}{R} \int_0^y \frac{dy}{\tau}} \cdot 474 \cdot 10^{-4} \cdot v \cdot k \left(\frac{v}{a} \right) \cdot u = \\ &= -\frac{id^2}{q} \cdot 0.474 \cdot \frac{P_0}{P_{0N}} \cdot k \left(\frac{v}{a} \right) \cdot \tau_{0N}^{1-\frac{1}{RG}} \cdot \tau^{\frac{1}{RG}-1} \cdot v \cdot u = c_1 \cdot \tau^{\frac{1}{RG}-1} \cdot \sqrt{u^2 + w^2} \cdot u, \end{aligned}$$

здесь

$$c_1 = -\frac{id^2}{q} \cdot 0.474 \cdot \frac{P_0}{P_{0N}} \cdot k \left(\frac{v}{a} \right) \cdot \tau_{0N}^{1-\frac{1}{RG}}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} = & -\frac{id^2}{q} \cdot 10^3 \cdot \frac{P_0}{P_{0N}} \cdot \frac{\tau_{0N}}{\tau} \cdot e^{-\frac{1}{RG} \int_0^y \frac{dy}{\tau}} \cdot v \cdot k \left(\frac{v}{a} \right) \cdot w - g = -\frac{id^2}{q} \cdot 0.474 \cdot \frac{P_0}{P_{0N}} \times \\ & \times k \left(\frac{v}{a} \right) \cdot \tau_{0N}^{1-\frac{1}{RG}} \cdot \tau^{\frac{1}{RG}-1} \sqrt{u^2 + w^2} \cdot w - g = c_1 \cdot \tau^{\frac{1}{RG}-1} \sqrt{u^2 + w^2} \cdot w - g. \end{aligned}$$

Отсюда получим новый вариант постановки общей задачи внешней баллистики, соответствующий сделанным предположениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= c_1 \tau^{\frac{1}{RG}-1} \sqrt{u^2 + w^2} u, & \frac{dx}{dt} &= u, \\ \frac{dw}{dt} &= c_1 \tau^{\frac{1}{RG}-1} \sqrt{u^2 + w^2} w - g, & \frac{dy}{dt} &= w, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где $\tau = 288^0 - 0.006328y$ с начальными условиями (2).

3. Интервальная постановка задачи.

Предположим, что начальные координаты, начальный угол и начальная скорость полета снаряда заданы неточно, т.е. их возможные значения принадлежат некоторому интервалу (ниже интервальные величины выделяются жирным шрифтом [2]):

$$x_0 \in [\underline{x}_0, \bar{x}_0] = \mathbf{x}_0, \quad y_0 \in [\underline{y}_0, \bar{y}_0] = \mathbf{y}_0, \quad \theta \in [\underline{\theta}_0, \bar{\theta}_0] = \boldsymbol{\theta}_0, \quad v_0 \in [\underline{v}_0, \bar{v}_0] = \mathbf{v}_0.$$

Тогда из (2) при $\mathbf{u}(0) = \mathbf{v}_0 \cos \boldsymbol{\theta}_0 = \mathbf{u}_0$, $\mathbf{w}(0) = \mathbf{v}_0 \sin \boldsymbol{\theta}_0 = \mathbf{w}_0$, получаем интервальную постановку основной задачи внешней баллистики:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= c_1 \tau^{\frac{1}{RG}-1} \sqrt{u^2 + w^2} u, & \frac{dx}{dt} &= u, \\ \frac{dw}{dt} &= c_1 \tau^{\frac{1}{RG}-1} \sqrt{u^2 + w^2} w - g, & \frac{dy}{dt} &= w, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

с начальными условиями

$$u(0) \in \mathbf{u}_0, \quad w(0) \in \mathbf{w}_0, \quad x(0) \in \mathbf{x}_0, \quad y(0) \in \mathbf{y}_0. \quad (9)$$

Для упрощения изложения введем обозначения:

$$\tilde{z} = \begin{pmatrix} u \\ w \\ x \\ y \end{pmatrix}, \quad \tilde{z}_0 = \begin{pmatrix} u(0) \\ w(0) \\ x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}, \quad \tilde{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} f_1(\tilde{z}) = c_1 \tau^{\frac{1}{RG}-1} \sqrt{u^2 + w^2} u \\ f_2(\tilde{z}) = c_1 \tau^{\frac{1}{RG}-1} \sqrt{u^2 + w^2} w - g \\ f_3(\tilde{z}) = u \\ f_4(\tilde{z}) = w \end{cases}$$

4. Решение задачи интервальным методом.

При решении задачи (8) – (9) интервальным методом будем предполагать, что $\tilde{f}(\tilde{z})$ определена и имеет две первые ограниченные производные на интервале $\tilde{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$, где $\mathbf{a}_i = [\underline{a}_i, \bar{a}_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Метод допускает неточно заданные начальные условия, т.е. предполагается существование интервала \tilde{z}_0 такого, что он лежит строго в $\tilde{\mathbf{a}}$ и $\tilde{z}_0 \in \tilde{z}_0$. Кроме того, полагаем, что функция $\tilde{f}(\tilde{z})$ имеет интервальное расширение $\tilde{f}(\tilde{z})$, обладающее следующими свойствами:

$\tilde{f}(\tilde{z})$ определено и непрерывно при всех $\tilde{z} \in \tilde{\mathbf{a}}$;

$\tilde{f}(\tilde{z})$ монотонно по включению, т.е. для $\tilde{z}_1 \subset \tilde{z}_2$ следует $\tilde{f}(\tilde{z}_1) \subset \tilde{f}(\tilde{z}_2)$;

Существуют числа $l_i > 0$, такие, что $\text{wid}(\tilde{f}_i(\tilde{z})) \leq l_i \text{wid}(\tilde{z})$ для всех $\tilde{z} \in \tilde{\mathbf{a}}$, где функция $\text{wid}(\bullet)$ – ширина интервала и определяется как $\text{wid}(\mathbf{a}) = \text{wid}([\underline{a}, \bar{a}]) = \bar{a} - \underline{a} \geq 0$, также $\text{wid}(\tilde{z}) = \max_k \text{wid}(z_k)$.

Далее будем предполагать, что существуют $\psi_i(\tilde{z})$ – интервальные расширения функций

$$z_i''' = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left((f_i)''_{z_k z_j} + (f_i)'_{z_k} (f_i)'_{z_j} \right) \cdot f_j,$$

непрерывные и монотонные по включению.

Поскольку z_0 лежит строго внутри интервала $\tilde{\mathbf{a}}$, для некоторого конечного $h_0 > 0$ найдутся числа $\xi_i > 0$ такие, что $z_{i0} + \xi_i \left(\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{a}}) + \frac{h_0^2}{12} \psi_i(\tilde{\mathbf{a}}) \right) \subset \mathbf{a}_i$. Интервальное решение строится на отрезке $[0, \xi]$, который предварительно разбивается на m частей точками

$$x_i = i h, \quad i = 0, 1, \dots, m, \\ h = \frac{\xi}{m} < h_0, \quad \xi = \min\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}.$$

Сами значения $z_i(x_{k+1})$ предлагаются вычислять по формулам:

$$z_{i0} = z_i(0), \quad (10)$$

$$z_i(x_{k+1}) = z_{ik+1} = z_{ik} + \frac{h}{2} \{ f_i(z_{1k}, \dots, z_{nk}) + f_i(z_{1k} + hf_1(z_{1k} + [0, h]f_1(\tilde{a}), \dots, z_{nk} + [0, h]f_n(\tilde{a})), z_{2k} + hf_2(z_{1k} + [0, h]f_1(\tilde{a}), \dots, z_{nk} + [0, h]f_n(\tilde{a})), \dots, z_{nk} + [0, h]f_n(\tilde{a}))) \} - \frac{h^3}{12} \psi_i(z_{1k} + [0, h]f_1(\tilde{a}), \dots, z_{nk} + [0, h]f_n(\tilde{a})). \quad (11)$$

5. Оценка ширины интервального решения.

Далее, в целях краткости изложения, предположим, что задача (8)–(9) является частным случаем следующей задачи

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(y), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

с начальными условиями

$$y_i(0) = y_{i0} \in y_{i0} = y_i(0), \quad (13)$$

где $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$.

Третья производная решения с использованием исходного уравнения, определяется следующим образом:

$$y_i''' = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left((f_i)_{y_k y_j} + (f_i)_{y_k} (f_i)_{y_j} \right) \cdot f_j.$$

Если $f_i(y)$ и $\psi_i(y)$ интервальные расширения соответственно функций f_i и y_i''' определенные на $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \dots \times \mathbf{a}_n$, то можно построить интервальное решение задачи (12)–(13) по формулам обобщающим формулы (11):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_i(x_{k+1}) = \mathbf{y}_{ik+1} = \mathbf{y}_{ik} + \frac{h}{2} \{ \mathbf{f}_i(\mathbf{y}_{1k}, \dots, \mathbf{y}_{nk}) + \mathbf{f}_i(\mathbf{y}_{1k} + h\mathbf{f}_1(\mathbf{y}_{1k} + \\
 + [0, h]\mathbf{f}_1(\mathbf{a}), \dots, \mathbf{y}_{nk} + [0, h]\mathbf{f}_n(\mathbf{a})), \mathbf{y}_{2k} + h\mathbf{f}_2(\mathbf{y}_{1k} + [0, h]\mathbf{f}_1(\mathbf{a}), \dots, \\
 \mathbf{y}_{nk} + [0, h]\mathbf{f}_n(\mathbf{a}), \dots, \mathbf{y}_{nk} + h\mathbf{f}_n(\mathbf{y}_{1k} + [0, h]\mathbf{f}_1(\mathbf{a}), \dots, \mathbf{y}_{nk} + [0, h]\mathbf{f}_n(\mathbf{a}))) \} - \\
 - \frac{h^3}{12} \psi_i(\mathbf{y}_{1k} + [0, h]\mathbf{f}_1(\mathbf{a}), \dots, \mathbf{y}_{nk} + [0, h]\mathbf{f}_n(\mathbf{a})).
 \end{aligned} \tag{14}$$

Рассмотрим вопрос об оценке ширины интервального решения задачи (12)–(13), получаемого по формулам (14).

Используя следующие свойства функции ширины $\text{wid}(\mathbf{a})$ [3]:

1. $\text{wid}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \leq \text{wid}(\mathbf{a}) + \text{wid}(\mathbf{b})$,
2. $\text{wid}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \leq \|\mathbf{a}\| \text{wid}(\mathbf{b}) + \|\mathbf{b}\| \text{wid}(\mathbf{a})$,

имеем

$$\begin{aligned}
 \text{wid}(\mathbf{y}_{ik+1}) \leq \text{wid}(\mathbf{y}_{ik}) + \text{wid}\{ \frac{h}{2} [\mathbf{f}_i(\mathbf{y}_{1k}, \dots, \mathbf{y}_{nk}) + \mathbf{f}_i(\mathbf{y}_{1k} + h\mathbf{f}_1(\mathbf{y}_{1k} + [0, h]\mathbf{f}_1(\mathbf{a}), \dots, \mathbf{y}_{nk} + \\
 + [0, h]\mathbf{f}_n(\mathbf{a})), \mathbf{y}_{2k} + h\mathbf{f}_2(\mathbf{y}_{1k} + [0, h]\mathbf{f}_1(\mathbf{a}), \dots, \mathbf{y}_{nk} + [0, h]\mathbf{f}_n(\mathbf{a}), \dots, \mathbf{y}_{nk} + h\mathbf{f}_n(\mathbf{y}_{1k} + \\
 + [0, h]\mathbf{f}_1(\mathbf{a}), \dots, \mathbf{y}_{nk} + [0, h]\mathbf{f}_n(\mathbf{a})))] \} - \text{wid}\{ \frac{h^3}{12} \psi_i(\mathbf{y}_{1k} + [0, h]\mathbf{f}_1(\mathbf{a}), \dots, \mathbf{y}_{nk} + \\
 + [0, h]\mathbf{f}_n(\mathbf{a})) \} \leq \dots \leq \text{wid}(\mathbf{y}_{ik}) + [hl + \frac{l^2 h^2}{2} n] \sum_{j=1}^n \text{wid}(\mathbf{y}_{ik}) + \\
 + h^3 \left\{ \frac{l^2 n}{2} \sum_{j=1}^n [\text{wid}(\mathbf{f}_j(\mathbf{a})) + \|\mathbf{f}_j(\mathbf{a})\|] + \frac{1}{12} \omega(\psi_i(\mathbf{a})) \right\}.
 \end{aligned}$$

Обозначая $c = \frac{1}{2} l^2 n \sum_{j=1}^n [\text{wid}(\mathbf{f}_j(\mathbf{a})) + \|\mathbf{f}_j(\mathbf{a})\|] + \frac{1}{12} \text{wid}(\psi_i(\mathbf{a}))$ и $\frac{hl}{2} \leq \frac{h_0 l}{2} = \delta$,

имеем $\text{wid}(\mathbf{y}_{ik+1}) \leq \text{wid}(\mathbf{y}_{ik}) + [2 + 2n\delta]\delta \sum_{j=1}^n \text{wid}(\mathbf{y}_{jk}) + ch^3$.

Далее, положив, $r = [2 + 2n\delta]\delta$ получаем

$$\text{wid}(\mathbf{y}_{ik+1}) \leq \text{wid}(\mathbf{y}_{ik}) + r \sum_{j=1}^n \text{wid}(\mathbf{y}_{jk}) + ch^3.$$

Подставим в правую часть последнего неравенства вместо $\text{wid}(\mathbf{y}_{i_k})$ из неравенства $\text{wid}(\mathbf{y}_{i_k}) \leq \text{wid}(\mathbf{y}_{i_{k-1}}) + r \sum_{j=1}^n \text{wid}(\mathbf{y}_{j_{k-1}}) + c h^3$ и получим верхнюю оценку, что

$$\text{wid}(\mathbf{y}_{i_{k+1}}) \leq \text{wid}(\mathbf{y}_{i_{k-1}}) + 2r \sum_{j=1}^n \text{wid}(\mathbf{y}_{j_{k-1}}) + r^2 n \sum_{j=1}^n \text{wid}(\mathbf{y}_{j_{k-1}}) + (r+2)c h^3.$$

Продолжая таким образом соответствующие подстановки, т.е. подставляя, вместо $\text{wid}(\mathbf{y}_{i_{k-1}})$, $\text{wid}(\mathbf{y}_{i_{k-2}})$ и т. д. их верхние оценки, при условии $|rn| < 1$, получим окончательную оценку:

$$\text{wid}(\mathbf{y}_{i_{k+1}}) \leq \text{wid}(\mathbf{y}_{i_0}) + M \sum_{j=1}^n \text{wid}(\mathbf{y}_{i_0}) + N_1 h^2, \quad (15)$$

где

$$M = k r + r \max_{1 \leq m \leq k} (\mathbf{a}_m) \frac{1}{1 - rn},$$

$$N_1 = \left[(k+1)r + r \max_{1 \leq m \leq k} (\mathbf{b}_m) \frac{1}{1 - rn} \right] \frac{2c}{l[2 + 2n\delta]\delta}.$$

Полученная оценка показывает, что данный метод имеет второй порядок.

Список литературы

1. Дмитриевский А.А. Внешняя баллистика. – М: Машиностр-е, 1979.
2. R.B. Kearfott, M.T. Nakao, A. Neumaier, S.M. Rump, S.P. Shary, P. Hentenryck. Standardized notation in interval analysis. – 2005 [Electronic resource]. – Access mode: <http://www.ict.nsc.ru/interval/InteNotation.ps>
3. Калмыков С.А. Методы интервального анализа / С.А. Калмыков, Ю.И. Шокин, З.Х. Юлдашев. – Новосибирск: Наука, 1986.

Эсанбаев Бунёд Икматулло углы – студент Навоийского государственного педагогического института, Республика Узбекистан, Навои.

Esanbaev Bunyod Ikmatullo ugly – student at the Navoi State Pedagogical Institute (NavSPI), the Republic of Uzbekistan, Navoiy.

Ибрагимов Алимжан Артикбаевич – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Методика преподавания информатики» Навоийского Государственного Педагогического Института, Республика Узбекистан, Навои.

Ibragimov Alimzhan Artikbaevich – candidate of technical sciences, associate professor of the «Computer Science Teaching Methods» at the Navoiy State Pedagogical Institute (NavSPI), the Republic of Uzbekistan, Navoiy.
