УДК 664.66

DOI 10.21661/r-350987

С.А. Атанбаев, Г.О. Сейтбекова, М.М. Сыдыкова

РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ КВАЗИОБРАЩЕНИЯ

***Аннотация**: в данной статье рассматривается задача восстановления теплого потока на поверхности бесконечно протяженной пластины по результатам измерения температуры и теплого потока на противоположной стороне пластины.*

***Ключевые слова**: краевая задача, некорректные задачи, уравнение теплопроводности, регуляризующие алгоритмы, квазиобращения.*

S.A. Atanbaev, G.O. Seitbekova, M.M. Sydykova

SOLUTION OF BORDER REVERSE PROBLEM OF HEAT CONDUCTIVITY BY THE METHOD OF QUASI-INVERSION

***Abstract**: this article considers the problem of warm stream renewal on a surface of infinitely extensive plate based on the results of temperature and warm stream measuring on the opposite side of the plate.*

***Keywords**: regional task, ill-conditioned problems, equalization of heat conductivity, regularizing algorithm, quasi-inversion.*

Введение. Граничные обратные задачи теплопроводности (ОЗТ), в которых по результатам измерений температур и тепловых потоков на одной из поверхностей пластины требуется определить законы измерения температуры и теплового потока на противоположной стороне, возникают в различных областях: металлургической и строительной теплотехнике, машиностроении, металлургии, измерительной технике и других.

Как правило с математической точки зрения эти задачи являются некорректно поставленными. Для их решения разрабатывались различные регуляризующие алгоритмы [1]. Вместе с тем, несмотря на широкую распространенность таких задач и большое число публикаций по этому вопросу, проблему построения эффективных вычислительных алгоритмов решения рассматриваемого класса задач в настоящее время нельзя считать окончательно закрытой. Особенно это касается тех задач, в которых не удается задать начальное распределение температур.

В статьи предложен регуляризующий алгоритм, основанный на использовании метода квазиобращения, не требующий задания начального распределения температур.

Показано, что решение регуляризованной модельной задачи ближе к точному её решению, если перед применением МКО исходные данные подвергаются теплофизическому сглаживанию [5].

Математическая постановка граничной обратной задачи. Формальная математическая запись рассматриваемой задачи может быть представлена в виде:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}\, 0 \leq X \leq 1, 0 \leq t \leq 1, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -q, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq x \leq 1, \tag{2}$$

$$\varphi(0,t) = \varphi_0(t), \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -q_0(t), x = 0, 0 < t < 1, \tag{3}$$

где $\varphi(\mathrm{x},t)$ – температура $q(\mathrm{x},t)$ – тепловой поток $\varphi_0(t)$ и $q_0(t)$ – заданные функции. Для удобства применения МКО к решению некорректной задачи (1)–(3) поменяем x и t:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial t}, 0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -q, 0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1, \tag{5}$$

$$\varphi(0,x) = \varphi_0(x), \frac{\partial\varphi}{\partial t} = q_0(x), t = 0, 0 < x < 1, \tag{6}$$

И далее перепишем соотношения (4)-(6) в векторно- матричном виде:

$$\frac{dV}{dt} = AV, 0 \leq t \leq 1, \tag{7}$$

$$\mathrm{V}(0) = V_0 \tag{8}$$

где $\mathrm{V}=\begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -E & 0 \end{bmatrix}, V_0 = \begin{pmatrix} q_0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix}$.

Система уравнений (7)–(8) представляет собой задачу Коши для эволюционного уравнения. Здесь матрица А-оператор произвольной спектральной структуры. Среди ее собственных значений есть как положительные, так и отрицательные числа. Поэтому рассматриваемая задача является некорректно поставленной в классическом смысле. Для решения подобных задач обычно применяются методы регуляризации. В данном случае для построения регуляризующего алгоритма используется метод квазиобращения.

Вычислительный алгоритм метода квазиобращения. Рассмотрим следующее семейство регуляризованных задач, построенных на основе метода квазиобращения:

$$\frac{dV_a}{dt} = AV_a\text{-}\alpha A^{\circ}AV_a, V_a = \begin{bmatrix} q_a \\ \varphi_a \end{bmatrix}\ 0 \le t \le 1 \tag{9}$$

$$V_a(0) = V_a \tag{10}$$

Где оператор A^*A имеет следующий вид:

$A^*A = \begin{bmatrix} \mathrm{E} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}$, и $\alpha(\alpha > 0)$ – параметр регуляризации.

Перепишем задачу (9)–(10) в форме:

$$\frac{\partial q_\alpha}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x}\text{-}\alpha q_\alpha, 0 \le t \le 1, 0 \le x \le 1, \tag{11}$$

$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial t} = \alpha \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x^2}\text{-}q, 0 \le t \le 1, 0 \le x \le 1, \tag{12}$$

$$q_a(x,0) = q_0(x), \varphi_a(x,0) = \varphi_0(x), t = 0, 0 \le x \le 1, \tag{13}$$

От исходной области изменения непрерывных аргументов

П=$\{(x,t);\ 0 \le x \le 1, 0 \le x \le 1\}$ перейдем к сеточной области

$$\Pi_{\Delta t,h=}\{t_{1=t_{t\text{-}1}} + \Delta t, i = 1,2,\dots,N;\ x_j = x_{j\text{-}1} + h, j = 1,2\dots,M\},$$

где $\Delta t, h$-шаги разностной сетки по t и x соответственно

Заменим в (11)–(13) производные конечно-разностными соотношениями и разрешим систему разностных уравнений относительно неизвестной сеточной функций на последующем слое по переменной t (индекс α для упрощения опускаем):

$$q_{t+1}^1(\varphi_t^2\text{-}\varphi_t^1)\text{-}(\alpha\Delta t\text{-}1)q_t^1, j = 1, \tag{14}$$

$$q_{i+1}^j = -\frac{\Delta t}{h}(\varphi_i^{j+1}\text{-}\varphi_i^{j\text{-}1})\text{-}(\alpha\Delta t\text{-}1)q_i^j, j = 1,2,\dots., M\text{-}1, \tag{15}$$

$$q_{i+1}^M = -\frac{\Delta t}{h}(\varphi_i^M\text{-}\varphi_i^{M\text{-}1})\text{-}(\alpha\Delta t\text{-}1)q_i^j, j = \mathrm{M} \tag{16}$$

$$\varphi_{i+1}^j = \frac{\alpha\Delta t}{h^2}(\varphi_i^{j+1}\text{-}2\varphi_i^j + \varphi_i^{j\text{-}1}) + \varphi_i^j\text{-}\Delta t q_i^j, j = 1,2\dots,M\text{-}1, \tag{17}$$

$$\varphi_{i+1}^{j} = \frac{\alpha\Delta t}{h}(\varphi_i^2 \text{-} \varphi_i^1) + \varphi_i^1 \text{-} \Delta t q_i^j, j = 1, \quad (18)$$

$$\varphi_{i+1}^{M} = \frac{\alpha\Delta t}{h}(\varphi_i^M \text{-} \varphi_i^{M\text{-}1}) + \varphi_i^M \text{-} \Delta t q_i^M, j = \text{M}. \quad (19)$$

Используя систему рекурентных соотношений (14)–(19) можно последовательно от слоя к слою вычислить значения искомых сеточных функций для всех i.

Результаты численных экспериментов и их анализ. Отработка алгоритма метода квазиобращения проводились на основе тестовой задачи, имеющей точное аналитическое решения. Рассматривалась следующая краевая задача теплопроводности:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \ 0 \le x \le 1, 0 \le t \le 1, \quad (20)$$

$$\text{-}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 1, x = 1, 0 \le t \le 1, \quad (21)$$

$$\text{-}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, x = 1, 0 \le t \le 1, \quad (22)$$

$$\varphi(x,0) = 0{,}0 \le x \le 1, t = 0. \quad (23)$$

Решение задачи (20)-(23) имеет следующий вид:

$$\varphi(x,t) = t + \frac{3x^2\text{-}1}{6} \text{-} 2\pi^{\text{-}2}\sum_{i=1}^{\infty}(\text{-}1)^n \frac{\cos(\pi i x)}{i^2} exp(\text{-}\pi^2 i^2 t). \quad (24)$$

В качестве начального значения V_0 вектора V для выполнения вычислений по формулам (14)–(19) с учетом замены *x* на *t* и наоборот принимаем следующие:

$$\varphi_{0(x_j)} = \varphi_0^j = x_j \text{-} \frac{1}{6} \text{-} 2\pi^{\text{-}2}\sum_{i=1}^{\infty}(\text{-}1)^n i^{\text{-}2} exp(\text{-}i^2, \pi^2 x_j), j = 1,2,\dots,M, \quad (25)$$

$$q_{0(x_j)} = q_0^j = 0, j = 1,2,\dots,M. \quad (26)$$

Вычислительный эксперимент осуществлялся в следующем порядке. Сначала по начальным данным Коши (25)–(26) вычислялось пространственно-временное распределение температур и тепловых потоков вплоть до границы x = 1 по обычной явной конечно-разностной схеме без применения метода квазиобращения. При этом на начальные данные, представленные в форме Коши накладывалась импульсная помеха $\Delta\varphi = 10^{\text{-}4}$ и $\Delta q = 10^{\text{-}5}$ при x = 0.2 и x = 0.8. Полученные результаты сравнивались с заданным единичным тепловым потоком. После этого начальные данные зашумлялись комбинированной синусоидальной помехой с частотой ϖ и амплитудой *a* и рассмотренной выше импульсной помехой и вновь проводились вычисления температур и тепловых потоков вплоть до границы рассматриваемой области. При этом возмущения, полученные начальным распределением поля температур, трансформировались а возмущения распределения теплового потока, которые по мере приближения к границе $x = 1$ усиливались. Затем задача с возмущенными начальными данными решалась с использованием алгоритма МКО (14)-(19). Значения параметра регуляризации α выбирались экспериментально. Далее проводилась исследование влияния предварительного теплофизического сглаживания начальных данных [5], осуществляемого при помощи следующей формулы:

$$\varphi_{\alpha}^{\varepsilon}(t_{k+1}) = exp(-\beta\Delta t)\varphi_{\alpha}^{\varepsilon}(t_k)\text{-}(1\text{-}exp(-\beta\Delta t))(\varphi_{\alpha}^{\varepsilon}(t_{k+1}) + \Delta\varphi), \quad (27)$$

где $\beta = \frac{\Delta t}{\varepsilon h}$, $\Delta t = t_{k+1}\text{-}t_k$, а ε – второй параметр регуляризации (искусственное заглубление точки термометрирования).

Заключение. Анализ результатов численного эксперимента, проведенного в широком диапазоне изменения параметра регуляризации α и ϖ позволяет сделать следующие выводы:

1. Метод квазиобращения является эффективным средством повышения устойчивости решения граничной обратной задачи теплопроводности по отношению к случайной погрешности измерения температур и тепловых потоков. При этом не требуется задание начального распределения температур.

2. Оптимальное значение параметра регуляризации α определяется экспериментальным путем. Для рассматриваемого класса задач можно рекомендовать значение параметра регуляризации α = 0.5E-03.

3. Алгоритм метода квазиобращения эффективен как при низких, так и при высоких частотах комбинированной синусоидальной помехи.

4. Наилучшего результата при решении граничной обратной задачи теплопроводности можно добиться путем одновременного применения метода квазиобращения и теплофизического сглаживания исходных данных.

Список литературы

1. Тихнов А.А. Методы решения некорректных задач / А.А. Тихнов, В.Л. Арсенин. – М, 1986.

2. Атанбаев С.А. Метод квазиобращения и его применение. – Алматы, 2015.

3. Латтес Р. Метод квазиобращения и его приложения / Р. Латтес, Ж.Л. Лионс. – М.,1986.

4. Вабищевич П.Н. Метод квазиобращения для приближенного решения задач теплообмена / Предпринт ИБРАЭ АН СССР. – 1991. – №11.

5. Ержанов Р.Ж. Сосредоточенная ёмкость в задачах теплофизики и микроэлектроники / Р.Ж. Ержанов, Ю.М. Мацевитый, У.М. Султангазин, В.П. Шерышев. – Киев, 1992.

6. Атанбаев С.А. Об одном разностном аналоге метода квазиобращения для эволюционных уравнений // Вестник / КазГУ. Сер. мат. – 1998. – №11.

Атанбаев Сапар Атанбаевич – д-р физ.-мат. наук, профессор Алматинского технологического университета, Республика Казахстан, Алматы.

Atanbaev Sapar Atanbaevich – doctor of physical and mathematical sciences, professor at the Almaty Technological University, the Republic of Kazakhstan, Almaty.

Сейтбекова Гульжан Оразбаковна – магистр технических наук, старший преподаватель кафедры информационных технологий Алматинского технологического университета, Республика Казахстан, Алматы.

Seitbekova Gulzhan Orazbakovna – master of technical sciences, senior lecturer of the Department of Information Technologies at the Almaty Technological University, the Republic of Kazakhstan, Almaty.

Сыдыкова Мадина Мукатаевна – магистр технических наук, старший преподаватель кафедры информационных технологий Алматинского технологического университета, Республика Казахстан, Алматы.

Sydykova Madina Mukataevna – master of technical sciences, senior lecturer of the Department of Information Technologies at the Almaty Technological University, the Republic of Kazakhstan, Almaty.

Атанбаев Сапар Атанбаевич