Микишанина Евгения Арифжановна
старший преподаватель
ФГБОУ ВО «Чувашский государственный
университет им. И.Н. Ульянова»
г. Чебоксары, Чувашская Республика

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОГИБА ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА

Аннотация*: в работе предлагается математическая модель поведения ледяного покрова при нагружении. Для решения поставленной краевой задачи для дифференциального уравнения в частных производных используется обобщенное дискретное преобразование Фурье и аппарат почти-периодических функций.*

Ключевые слова*: изгиб, плита, обобщенное дискретное преобразование, Фурье, почти-периодические функции.*

Для России постоянно существует необходимость в освоении северных территорий, создании в условиях холодного климата ледовых переправ. Свойства льда столь разнообразны, что изучение прочностных свойств некоторого участка льда в рамках единой для рассматриваемой области математической модели иногда бывает затруднительным. Однако, если осреднить взаимодействие между частицами льда, то можно считать его моделью изотропного сплошного упругого тела и использовать для изучения его прочностных характеристик методы теории упругости.

Математическая модель поведения ледяного покрова при нагружении описывается дифференциальным уравнением в частных производных, [1]

$$\Delta^2 w + \frac{k}{D} w = \frac{q}{D}, \ (1)$$

где $w = w(x, y)$ – искомая функция изгиба, $q = q(x, y)$ – внешняя нагрузка, k – коэффициент жесткости упругого основания, D – коэффициент постели.

Перепишем уравнение (1) для удобства в виде

$$\Delta^2 w + p^2 w = Q, \ (2)$$

где $p^2 = \frac{k}{D}, \quad Q = \frac{q}{D}.$

Таким образом, ледяную плиту можно рассматривать как тонкую плиту на упругом основании.

В данной работе предлагается использование аппарата почти-периодических функций, [2], для определения функции прогиба как решения дифференциального уравнения (2) для области, представляющей собой полосу, на продольных кромках которой заданы условия жесткого защемления.

Постановка задачи. Найти в области, представляющей собой полосу $-\infty < x < +\infty, \; 0 \le y \le 1$, непрерывную вместе со своими частными производными до четвертого порядка функцию $w(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (2), если на границах заданы условия:

$$w\big|_{y=0} = 0, \quad w\big|_{y=1} = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{y=1} = 0.$$

Решение. Будем считать, что функция $Q(x, y) \in \Pi_W^y\left(\left[0,1\right]\right)$, то есть представима в виде ряда

$$Q(x, y) = q_0(y) + \sum_{\lambda \ne 0} q_\lambda(y) e^{i\lambda x},$$

$\{\lambda\}$ – счетное множество действительных чисел, которые не сгущаются к нулю.

Также будем считать, что функция прогиба $w(x, y) \in \Pi_W^y\left(\left[0,1\right]\right)$, то есть имеет вид

$$w(x, y) = A_0(y) + \sum_{\lambda} A_\lambda(y) e^{i\lambda x}.$$

Применяя к уравнению (2) обратное обобщенное дискретное преобразование Фурье W_0^{-1}, [3], получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\lambda = 0, \quad \frac{\partial^4 A_0}{\partial y^4} + p^2 A_0 = q_0(y), \tag{3}$$

$$\lambda \neq 0, \quad \frac{\partial^4 A_\lambda}{\partial y^4} - 2\lambda^2 \frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial y^2} + \left(\lambda^4 + p^2\right) A_\lambda = q_\lambda, \tag{4}$$

где $A_0 = A_0(y),\ A_\lambda = A_\lambda(y), \quad q_0 = q_0(y), \quad q_\lambda = q_\lambda(y).$

Решения уравнений (3) и (4) имеют вид:

$$\lambda = 0,\ A_0(y) = a_0(y) + d_1 e^{ny}\cos ny + d_2 e^{ny}\sin ny + d_3 e^{-ny}\cos ny + d_4 e^{-ny}\sin ny,$$

где $n = \sqrt{p/2}, \quad a_0(y)$ – некоторое частное решение уравнения (3);

$$\lambda \neq 0,\ A_\lambda(y) = a_\lambda(y) + c_1 e^{\alpha y}\cos\beta y + c_2 e^{\alpha y}\sin\beta y + c_3 e^{-\alpha y}\cos\beta y + c_4 e^{-\alpha y}\sin\beta y,$$

где $\alpha = \sqrt{\dfrac{\sqrt{\lambda^4 + p^2} + \lambda^2}{2}}, \quad \beta = \sqrt{\dfrac{\sqrt{\lambda^4 + p^2} - \lambda^2}{2}},\ a_\lambda(y)$ – частное решение уравнения (4), определяющееся при каждом λ.

Итак, искомая функция прогибов имеет вид

$$w(x, y) = a_0(y) + d_1 e^{ny}\cos ny + d_2 e^{ny}\sin ny + d_3 e^{-ny}\cos ny + d_4 e^{-ny}\sin ny +$$
$$+\sum_{\lambda\neq 0}\left(a_\lambda(y) + c_1 e^{\alpha y}\cos\beta y + c_2 e^{\alpha y}\sin\beta y + c_3 e^{-\alpha y}\cos\beta y + c_4 e^{-\alpha y}\sin\beta y\right)\cdot e^{i\lambda x}.$$

Константы $c_m = c_m(\lambda),\ d_m,\ m = \overline{1,4}$ находятся из граничных условий, то есть из систем уравнений (5) и (6):

$$\begin{cases} d_1 + d_3 = -a_0(0), \\ d_1 e^n \cos n + d_2 e^n \sin n + d_3 e^{-n}\cos n + d_4 e^{-n}\sin n = -a_0(1), \\ d_1 + d_2 - d_3 + d_4 = -\dfrac{a_0'(0)}{n} \\ d_1\left(e^n\cos n - e^n \sin n\right) + d_2\left(e^n \sin n + e^n\cos n\right) + \\ +d_3\left(-e^{-n}\cos n - e^{-n}\sin n\right) + d_4\left(-e^{-n}\sin n + e^{-n}\cos n\right) = -\dfrac{a_0'(1)}{n}, \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = -a_\lambda(0), \\ \alpha c_1 + \beta c_2 - \alpha c_3 + \beta c_4 = -a'_\lambda(0), \\ c_1 e^{\alpha}\cos\beta + c_2 e^{\alpha}\sin\beta + c_3 e^{-\alpha}\cos\beta + c_4 e^{-\alpha}\sin\beta = -a_\lambda(1), \\ c_1\left(\alpha e^{\alpha}\cos\beta - \beta e^{\alpha}\sin\beta\right) + c_2\left(\alpha e^{\alpha}\sin\beta + \beta e^{\alpha}\cos\beta\right) + \\ + c_3\left(-\alpha e^{-\alpha}\cos\beta - \beta e^{-\alpha}\sin\beta\right) + c_4\left(-\alpha e^{-\alpha}\sin\beta + \beta e^{-\alpha}\cos\beta\right) = -a'_\lambda(1). \end{cases} \quad (6)$$

Определители систем (5) и (6) не обращаются в 0 ни при каком $\lambda \neq 0$. Решения систем (5) и (6) существуют и единственны.

Рассмотрим частный случай. Пусть нагрузка $Q = Q(y)$ зависит только от переменной y. Тогда из системы (6) постоянные $c_m = 0$, а постоянные d_m определяются единственным образом из системы (5). Функция прогиба имеет вид

$$w(y) = a_0(y) + d_1 e^{ny}\cos ny + d_2 e^{ny}\sin ny + d_3 e^{-ny}\cos ny + d_4 e^{-ny}\sin ny. \quad (7)$$

На рисунке 1 представлен график функции прогиба при изгибающей нагрузке $Q = 4 + 16y^2$, $p = 2$.

Функция прогиба имеет вид

$$w(y) = 1 + 4y^2 - 0.1195e^{y}\cos(y) - 2.2317e^{y}\sin(y) - 0.8805e^{-y}\cos(y) + 1.4707e^{-y}\sin(y).$$

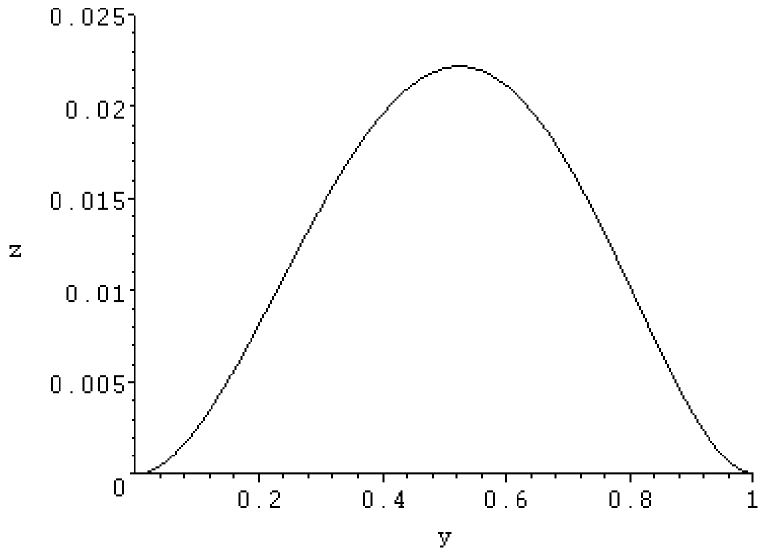

Рис. 1

Максимального прогиба $z = 0.0222$ плита достигает в точке $y = 0.525$.

Список литературы

1. Князьков В.В. Экспериментальное определение основных характеристик разрушения ледяного покрова / В.В. Князьков // Морской вестник. – 2008. – №4 (28). – С. 106–109.

2. Микишанина Е.А. Построение почти-периодических решений некоторых систем дифференциальных уравнений в задачах теории фильтрации / Е.А. Микишанина // Информационные технологии интеллектуальной поддержки принятия решений: Сб. тр. 4-й Междунар. конф. – Уфа: Изд-во УГАТУ, 2016. – Т. 2. – С. 138–141.

3. Кулагина М.Ф. Построение почти-периодических решений некоторых систем дифференциальных уравнений / М.Ф. Кулагина, Е.А. Микишанина // Математические заметки СВФУ. – 2015. – Т. 22. – №3. – С. 11–19.