Лебедева Лариса Владимировна
канд. физ-мат. наук, старший преподаватель
ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский
Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»
г. Нижний Новгород, Нижегородская область

DOI 10.21661/r-119026

МАТРИЦА ПРОСТЕЙШЕЙ ПАРНОЙ ИГРЫ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

***Аннотация**: в статье доказаны некоторые свойства элементов платежной матрицы для простейшей парной игры с нулевой суммой, что позволило сформулировать правило составления матриц с седловыми точками.*

***Ключевые слова**: конечная парная игра, нулевая сумма, седловые точки, платежная матрица.*

Теория игр [4, с. 19; 6, с. 417] – быстро развивающийся раздел математики – находит все больше применение в экономике, математической статистике, социологии, в задачах защиты информации [3, с. 19]. Поэтому в учебных вузовских программах для целого ряда специальностей этот раздел становится обязательным [1, с. 95; 5, с. 118]. Изучается теория игр и в школе – обычно на примере простейшей игры двух лиц (с нулевой суммой) платежная матрица которой, имеет седловую точку.

Как составить платежную матрицу, имеющую седловую точку? Сколько седловых точек может иметь платежная матрица? Как найти все седловые точки?

Рассмотрим простейшую конечную парную игру с нулевой суммой [2, с. 160], заданную платежной матрицей $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Пусть для всех $i = \overline{1,m}$ и всех $j = \overline{1,n}$ определены величины $\alpha_i = \min\limits_{1 \le j \le n}\{a_{ij}\}$ и $\beta_j = \max\limits_{1 \le i \le m}\{a_{ij}\}$.

Число $\alpha_p = \max_{1\le i\le m}\{\alpha_i\}$ называется нижней ценой игры, число $\beta_q = \min_{1\le j\le n}\{\beta_j\}$- верхней ценой игры (Будем использовать обозначения $\alpha = \alpha_p$ и $\beta = \beta_q$). Если $\alpha = \beta$, то говорят, что матрица A имеет седловую точку – элемент a_{pq}. Значение элемента a_{pq} в этом случае является ценой υ игры.

Очевидно [2, с. 162], что если a_{pq} – седловая точка, то $a_{pq} = \min_{1\le j\le n}\{a_{pj}\}$ и $a_{pq} = \max_{1\le i\le m}\{a_{iq}\}$. Приведем элементарные доказательства следующих свойств седловых точек.

Теорема 1. Если элемент a_{pq}, стоящий на пересечении p-ой строки и q-ого столбца, является минимальным в p-ой строке и максимальным в q-ом столбце, то элемент a_{pq} есть седловая точка.

Доказательство.

Так как $a_{pq} = \min_{1\le j\le n}\{a_{pj}\}$, то 1) $\alpha_p = \min_{1\le j\le n}\{a_{pj}\} = a_{pq}$; 2) $\forall j \ne q \quad a_{pj} = a_{pq} + \varepsilon_j^2$, где $\varepsilon_j^2 \ge 0$; 3) $\forall j \ne q \quad \beta_j = \max_{1\le i\le m}\{a_{ij}\} \ge a_{pj} \ge a_{pq}$.

Так как $a_{pq} = \max_{1\le i\le m}\{a_{iq}\}$, то 1) $\beta_q = \max_{1\le i\le m}\{a_{iq}\} = a_{pq}$; 2) $\forall i \ne p \quad a_{iq} = a_{pq} - \delta_i^2$, где $\delta_i^2 \ge 0$; 3) $\forall i \ne p \quad \alpha_i = \min_{1\le j\le n}\{a_{ij}\} \le a_{iq} \le a_{pq}$.

Имеем:

1) $\alpha_p = a_{pq}$; 2) $\alpha_i \le a_{pq}$, если $i \ne p$; 3) $\beta_q = a_{pq}$; 4) $\beta_j \ge a_{pq}$, если $j \ne q$.

Следовательно, $\alpha = \max_{1\le i\le m}\{\alpha_i\} = a_{pq}$ – нижняя цена игры; $\beta = \min_{1\le j\le n}\{\beta_j\} = a_{pq}$ – верхняя цена игры. Итак, $\alpha = \beta = a_{pq}$. Платежная матрица имеет седловую точку – элемент a_{pq}. Цена игры $\upsilon = a_{pq}$.

Теорема 2. Пусть элемент a_{pq}, стоящий на пересечении p-ой строки и q-ого столбца, является седловой точкой. Предположим, что в p-ой строке есть элемент a_{pk} ($k \ne q$) такой, что $a_{pk} = a_{pq}$ и $a_{pk} = \max_{1\le i\le m}\{a_{ik}\}$. Тогда элемент a_{pk} является еще одной седловой точкой матрицы A.

Доказательство.

Так как по условию теоремы a_{pq} – седловая точка, то $a_{pq} = \alpha_p = \max_{1\le i\le m}\{\alpha_i\} = \alpha$ и $a_{pq} = \beta_q = \min_{1\le j\le n}\{\beta_j\} = \beta$. Поскольку $a_{pk} = a_{pq}$ и $a_{pq} = \alpha$, то $a_{pk} = \alpha$. По условию теоремы $a_{pk} = \max_{1\le i\le m}\{a_{ik}\}$, то есть $\beta_k = a_{pk} = \beta$. Следовательно, a_{pk} – седловая точка.

Теорема 3. Пусть a_{pq} – седловая точка, и пусть есть элемент a_{pk} $(k \neq q)$ такой, что $a_{pk} = a_{pq}$ и $a_{pk} \neq \max_{1\le i\le m}\{a_{ik}\}$. Тогда элемент a_{pk} не является седловой точкой матрицы A.

Доказательство.

Элемент a_{pq} – седловая точка, т.е. $a_{pq} = \alpha_p = \alpha$. В силу равенства $a_{pk} = a_{pq}$ получаем $a_{pk} = \alpha_p = \alpha$. Но $a_{pk} \neq \max_{1\le i\le m}\{a_{ik}\}$, то есть существует такой элемент a_{lk} k-ого столбца, что $a_{lk} > a_{pk}$ и значит $\beta_k > \beta$. Следовательно, a_{pk} – не является седловой точкой.

Аналогично доказываются теоремы 4 и 5.

Теорема 4. Пусть элемент a_{pq} есть седловая точка. И пусть есть элемент a_{lq} $(l \neq p)$ такой, что $a_{lq} = a_{pq}$ и $a_{lq} = \min_{1\le j\le n}\{a_{lj}\}$. Тогда элемент a_{lq} является еще одной седловой точкой матрицы A.

Теорема 5. Пусть a_{pq} – седловая точка. И пусть есть элемент a_{lq} $(l \neq p)$ такой, что $a_{lq} = a_{pq}$ и $a_{lq} \neq \min_{1\le j\le n}\{a_{lj}\}$. Тогда элемент a_{lq} не является седловой точкой матрицы A.

Теорема 6. Предположим, что в платежной матрице есть седловая точка – элемент a_{pq}, такой что $\alpha = \beta = a_{pq} = \upsilon$. Кроме того, есть элемент a_{lk} – минимальный в своей строке и максимальный в своем столбце, т.е. $a_{lk} = \min_j a_{lj} = \max_i a_{ik}$. Тогда элемент a_{lk} тоже является седловой точкой и имеет место равенство $a_{lk} = a_{pq} = \upsilon$.

Доказательство. Так как $a_{lk} = \min\limits_j a_{lj}$, то $a_{lq} = a_{lk} + \varepsilon^2$. Так как $a_{lk} = \min\limits_i a_{ik}$, то $a_{pk} = a_{lk} - \delta^2$. ($\varepsilon_j^2 \geq 0$ и $\delta_i^2 \geq 0$). Из определения седловой точки следует истинность системы неравенств: $\begin{cases} a_{pq} \geq a_{lq} \\ a_{pq} \leq a_{pk} \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} a_{pq} \geq a_{lk} + \varepsilon^2 \\ a_{pq} \leq a_{lk} - \delta^2 \end{cases}$. Имеем $a_{lk} + \varepsilon^2 \leq a_{pq} \leq a_{lk} - \delta^2$. Отсюда $\varepsilon^2 + \delta^2 = 0$, т.е. $\varepsilon = \delta = 0$. Итак, $a_{lk} = a_{pq} = \upsilon$.

Следствие. При выполнении условий теоремы матрица игры имеет как минимум четыре седловые точки: a_{lk}, a_{lq}, a_{pk}, a_{pq}.

Таким образом, можно утверждать, что

1) для того, чтобы элемент a_{pq} был седловой точкой, необходимо и достаточно выполнение условия:

$$a_{pq} = \min_{1 \leq j \leq n}\{a_{pj}\} = \max_{1 \leq i \leq m}\{a_{iq}\} \quad (1)$$

2) платежная матрица может иметь столько седловых точек, сколько элементов матрицы удовлетворяют условиям теорем 1, 2, 4 и 6.

Для отыскания седловой точки обычно используется алгоритм, следующий из определения этого понятия [2, с. 162].

Если матрица A имеет очень большие размеры, то для отыскания первой седловой точки можно использовать следующую процедуру. Среди элементов первой строки выбрать наименьший (пусть $a_{1q} = \min\limits_{1 \leq j \leq n}\{a_{1j}\}$) и, если он является одновременно и наибольшим в своем столбце (т.е. $a_{1q} = \max\limits_{1 \leq i \leq m}\{a_{iq}\}$), то a_{1q} – седловая точка. Если $a_{1q} \neq \max\limits_{1 \leq i \leq m}\{a_{iq}\}$, то переходим к просмотру элементов следующей строки.

Пусть известно, что элемент a_{pq} – одна из седловых точек. Тогда для отыскания остальных седловых точек достаточно проверить выполнение условия (1) для тех элементов матрицы, значение которых равно значению a_{pq}.

Для построения матрицы с седловой точкой можно использовать следующий алгоритм.

1) выбрать строку и столбец, на пересечении которых должен стоять элемент a;

2) в качестве остальных элементов выбранной строки взять любые числа, не меньшие a, в качестве остальных элементов выбранного столбца – не большие a;

3) остальными элементами матрицы могут быть любые числа.

Список литературы

1. Власов Д.А. Методические особенности преподавания учебной дисциплины «Теория игр» // Успехи современной науки и образования. – 2016. – Т. 3. – №10. – С. 95–97.

2. Красс М.С. Математика в экономике: математические методы и модели: Учебник для бакалавров / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов; под ред. М.С. Красса. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Юрайт, 2013. – 541 с.

3. Лаврентьев А.В. О применении теории игр для решения задач компьютерной безопасности / А.В. Лаврентьев, В.П. Зорин // Безопасность информационных технологий. – 2013. – №3. – С 19–24.

4. Льюс Р.Д. Игры и решения. Введение и критический обзор / Р.Д. Льюс, Х.М. Райфа. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. – 642 с.

5. Синчуков А.В. Анализ перспективных направлений модернизации математической подготовки бакалавра // Инновационная наука. – 2016. – №10–1. – С. 118–119.

6. Таха Х.А. Исследование операций. – М.: Вильямс, 2016. – 912 с.