

Зеленый Андрей Сергеевич

магистрант

Бунякин Алексей Вадимович

канд. физ.-мат. наук, преподаватель

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет»

г. Краснодар, Краснодарский край

**УСКОРЕНИЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧИ  
НЕЙМАНА ОБТЕКАНИЯ ТЕЛА С ОСТРОЙ КРОМКОЙ  
ПОТЕНЦИАЛЬНЫМ ПОТОКОМ**

*Аннотация:* рассматривается задача обтекания аэродинамического профиля плоским потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости. Апроксимация контура профиля комплексным кубическим сплайном в комбинации с методом вихревого слоя позволяет получить полуаналитическое выражение для комплексного потенциала скорости во всей области течения. Для этого вся область течения разделяется на две односвязные области, в каждой из которых выделяется однозначная ветвь логарифмической функции. Данные полуаналитические выражения для потенциала существенно ускоряют процесс вычисления основных характеристик течения в произвольной точке области обтекания.

*Ключевые слова:* задача Неймана, идеальная жидкость, потенциал, метод вихревого слоя.

*Задача Неймана.* Классическая постановка внутренней задачи Неймана имеет следующий вид. В области  $\Omega$  необходимо найти функцию  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ , удовлетворяющую следующим условиям:

$$\Delta u = 0, \text{ в области } \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \big|_{\partial\Omega} = u_1(x), u_1 \in C(\partial\Omega),$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $n$  – внешняя единичная нормаль к границе области  $\Omega$ . На неограниченных областях  $\Omega$  (внешняя задача) добавляется дополнительное условие ограниченности на бесконечности искомой функции  $u$ .

*Постановка задачи обтекания.* В работе [1, с. 19] подробно изложен метод построения аэродинамического контура профиля по известным опорным точкам (т.н. «каркас профиля»). Данный алгоритм позволяет получить профиль любой сложности, а также с успехом применить метод вихревого слоя для поиска комплексного потенциала скорости.

Математическая постановка имеет следующий вид:

$$w(z) = U_\infty e^{-i\alpha} z - \oint \gamma(s) \ln(z - z(s)) ds, \quad (1)$$

$$U_n = 0,$$

где  $w(z)$  – комплексный потенциал скорости;

$U_\infty$  – скорость набегающего потока;

$\gamma(s)$  – вихревой слой;

$\alpha$  – угол атаки;

$U_n$  – условие непротекания.

Уравнение (1) представляет собой метод наложения потенциальных потоков для решения задач обтекания тел произвольной формы плоскопараллельным безвихревым потоком идеальной несжимаемой жидкости. Везде далее  $\alpha = 0$ . Дифференцируя (1) по  $z$  получаем сопряженную скорость течения

$$V = \frac{dw}{dz} = U_\infty - \frac{\partial}{\partial z} \oint \gamma(s) \ln(z - z(s)) ds. \quad (2)$$

Во избежание путаницы введем также комплексную скорость  $U = \bar{V}$

$$V = u - iv,$$

$$U = u + iv,$$

где  $u, v$  – компоненты вектора скорости.

В связи с заменой контура профиля ломаной (рисунок 1)

$$\gamma(s) = \gamma_k + \frac{(\gamma_{k+1} - \gamma_k)s}{\Delta s_k}, \quad z(s) = z_k + \frac{(z_{k+1} - z_k)s}{\Delta s_k}$$

$$z(s) = z_k + \frac{(z_{k+1}-z_k)s}{\Delta s_k}, \Delta s_k = |z_{k+1}-z_k|$$

$$s \in [0, \Delta s_k], k = 1, 2, \dots, n$$

интеграл в правой части (2) заменяется конечной суммой:

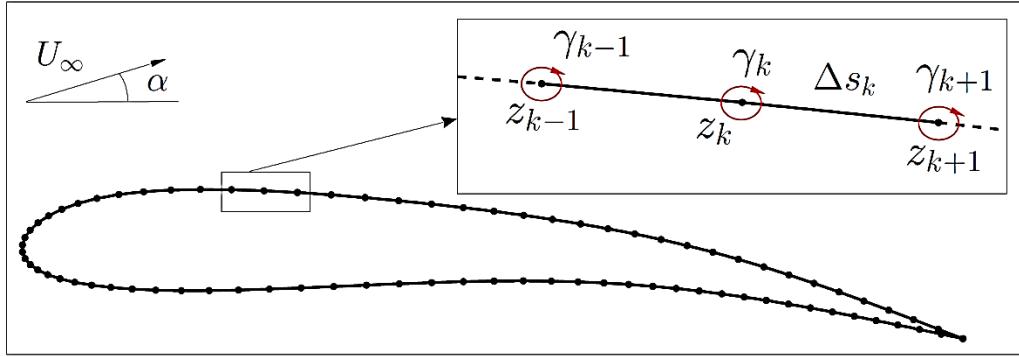


Рис. 1. Расположение точечных вихрей и точек на контуре

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \oint \gamma(s) \ln(z-z(s)) ds &= \oint \frac{\gamma(s)}{z-z(s)} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \int_0^{\Delta s_k} \frac{(\gamma_{k+1}-\gamma_k)s + \gamma_k \Delta s_k}{(z-z_k)\Delta s_k - (z_{k+1}-z_k)s} ds, \quad (3) \end{aligned}$$

то есть интеграл по контуру заменяется интегралом по ломаной, аппроксимирующей этот контур.

После взятия интеграла (3) и подстановки его в равенство (2) придем к выражению для комплексно-сопряженной скорости:

$$V = U_{\infty} \cdot \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \frac{\Delta s_k}{z_{k+1}-z_k} \left( \gamma_{k+1}-\gamma_k + \left\{ \frac{(z-z_k)(\gamma_{k+1}-\gamma_k)}{z_{k+1}-z_k} + \gamma_k \right\} \ln \frac{z-z_{k+1}}{z-z_k} \right) \quad (4)$$

Для нахождения  $\gamma_k$  надо произвести коллокацию с учетом граничного условия, состоящего в том, что на граничных элементах (на звеньях ломаной) скорость направлена по касательной к этим элементам. В качестве коллокационных точек берутся середины элементов. Подробное описание последующих действий можно найти в работе [2, с. 12]. В результате коллокации задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно  $\gamma_k$ . В качестве замыкания системы уравнений выступает уравнение

$$\gamma_1 + \gamma_{n+1} = 0.$$

Это условие Кутта-Жуковского, устраниющее неоднозначность решения задачи Неймана во внешности контура при задании производной в бесконечности. Физически оно означает, что линии тока при обтекании крылового профиля плавно сходят с острой кромки.

*Комплексный потенциал.* Проинтегрировав формально равенство (4) по  $z$  получим формулу для комплексного потенциала скорости:

$$w(z) = U_\infty z + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \frac{\Delta s_k}{2A_k} \left( B_k(z_k + z) - C_k A_k \ln(z - z_{k+1}) + \frac{(z_k - z)(C_k z_k - B_k z - 2\gamma_k z_{k+1}) \ln\left(\frac{z - z_{k+1}}{z - z_k}\right)}{A_k} \right), \quad (5)$$

где

$$A_k = z_{k+1} - z_k;$$

$$B_k = \gamma_{k+1} - \gamma_k;$$

$$C_k = \gamma_{k+1} + \gamma_k;$$

Константа интегрирования в равенстве (5) опущена, так как она не несет большой смысловой нагрузки.

Сложность в использовании формулы (5) для нахождения комплексного потенциала скорости  $w(z)$ , а, следовательно, и для нахождения вещественного потенциала  $\varphi(z) = \operatorname{Re}[w(z)]$  заключается в наличии множителя  $\ln(z - z_{k+1})$ .

*Выделение однозначных ветвей  $\ln(z)$ .* Из теории известно [3, с. 34], что функция

$$\ln(z) = \ln|z| + i\operatorname{Arg}(z) = \ln|z| + i(\theta + 2\pi k),$$

$$\theta \in [0, 2\pi], k \in \mathbb{Z}$$

является многозначной функцией.

В любой односвязной области  $D$ , которая не содержит замкнутых кривых, обходящих точку  $z = 0$ , можно выделить бесчисленное множество непрерывных и однозначных ветвей многозначной функции  $w = \ln(z)$ , значения которых в

каждой фиксированной точке отличаются друг от друга слагаемыми  $2k\pi i$ . Каждая такая ветвь  $\ln(z)$  будет осуществлять взаимно однозначное отображение области  $D$ .

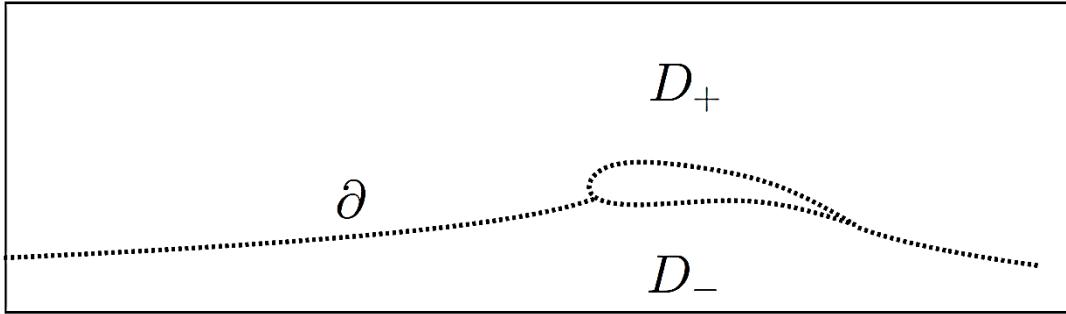


Рис. 2. Выделение односвязных областей

Разобьем всю область движения, которая не является односвязной на две односвязные области  $D_+$  и  $D_-$ , граница между которыми состоит из сепаратрисы течения и профиля крыла (рисунок 2).

Тогда в каждой односвязной области можно выделить главную ветвь логарифма  $\ln(z)$ :

$$\ln_+(z-z_{k+1}) = \ln|z-z_{k+1}| + i\text{Arg}_+(z-z_{k+1}): z \in D_+,$$

$$\ln_-(z-z_{k+1}) = \ln|z-z_{k+1}| + i\text{Arg}_-(z-z_{k+1}): z \in D_-.$$

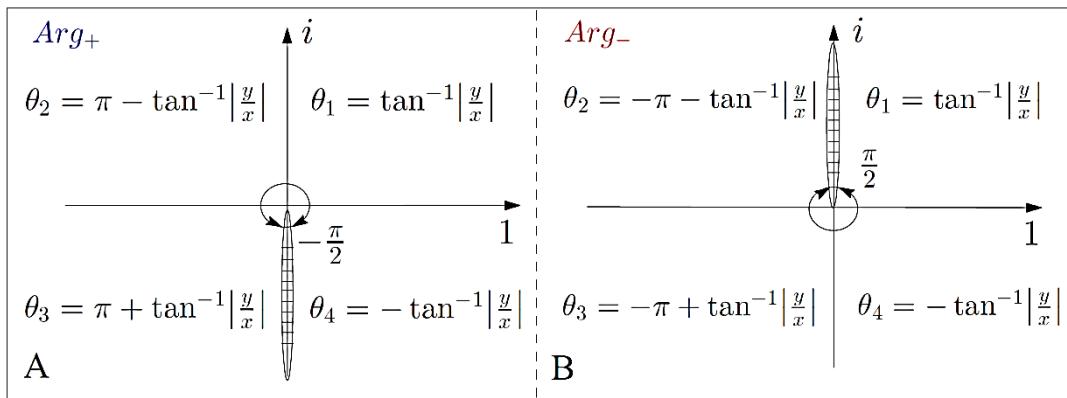


Рис. 3. К вычислению главных аргументов логарифмических функций

Экспериментальным путем с помощью численного расчета было установлено, что аргументы  $\text{Arg}_+$  и  $\text{Arg}_-$  в областях  $D_+$  и  $D_-$  необходимо вычислять с разрезами  $-\frac{\pi}{2}$  и  $\frac{\pi}{2}$  соответственно (рисунок 3).

Таким образом, среди всех ветвей многозначной функции (5) были выделены 2 однозначные ветви, осуществляющие отображения областей  $D_+$  и  $D_-$ :

$$W_{\pm}(z) = \bar{V}_{\infty} z$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \frac{\Delta s_k}{2A_k} \left( B_k(z_k + z) \cdot C_k A_k \ln_{\pm}(z - z_{k+1}) + \right. \\ \left. + \frac{(z_k - z)(C_k z_k - B_k z - 2\gamma_k z_{k+1}) \ln \left( \frac{z - z_{k+1}}{z - z_k} \right)}{A_k} \right), \quad (6)$$

$$z \in D_{\pm}$$

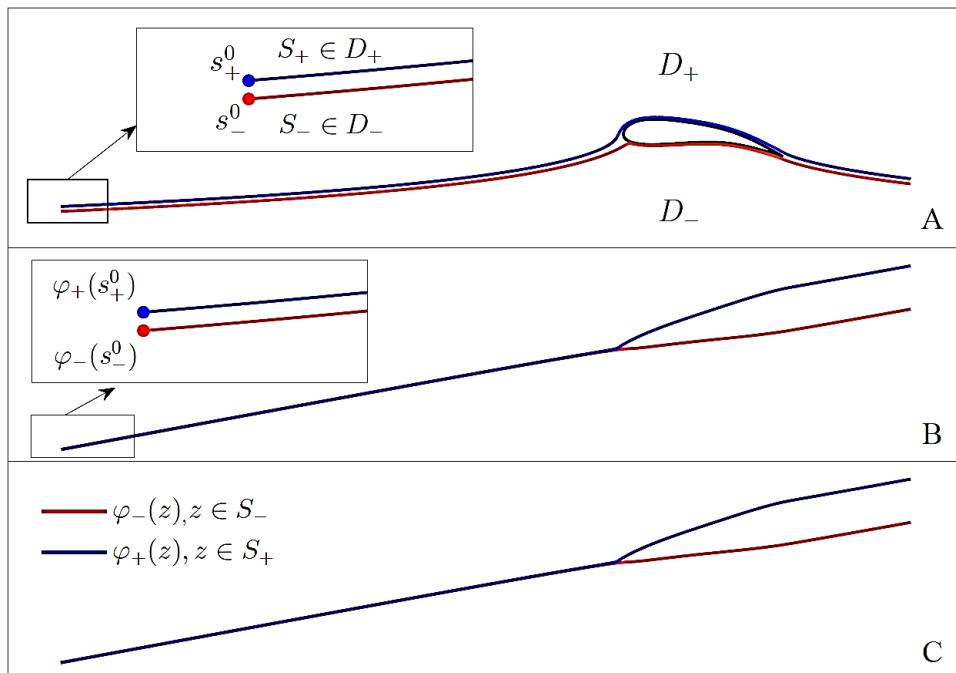


Рис. 4. Сравнение результатов интегрирования вещественнозначного потенциала методом Рунге-Кутта (рис. 4, В) с полуаналитическим решением  $\varphi_{\pm}(z) = \operatorname{Re}(w_{\pm}(z))$  (рис. 4, С)

На рисунке 4 показан результат численного интегрирования потенциала методом Рунге-Кутта с начальным условием  $\varphi_{\pm}^0 = \operatorname{Re}[w_{\pm}(s_{\pm}^0)]$ , (рис. 4, В), и потенциал, найденный с помощью функций (6) на линиях тока  $S_+$  и  $S_-$  (рис. 4, С), соответственно, где  $S_+$  и  $S_-$  – линии тока «обтекающие» профиль сверху и снизу. При этом сами линии тока  $S_+$  и  $S_-$  полностью лежат в односвязных областях  $D_+$  и  $D_-$  (рис. 4, А).

Путем анализа выходных данных установлено, что модуль разности соответствующих значений потенциала, полученных этими двумя способами – величина порядка  $1 \times 10^{-7}$ , что указывает на надежность и адекватность нашего метода линейного приближения – метода граничных элементов.

*Заключение.* С помощью полученных функций (6) можно находить значения потенциала в любой точке (за исключением сепаратрисы) течения. Данный алгоритм выделения однозначных ветвей с успехом использовался в описании колебаний (флаттера) сегмента аэродинамического профиля набегающим потоком [4].

### ***Список литературы***

1. Зеленый А.С. О методе аппроксимации плоской замкнутой кривой с острой кромкой / А.С. Зеленый, А.В. Бунякин // Международный научный журнал «Наука в цифрах». – 2017. – Вып. 2. – С. 19–21.
2. Зеленый А.С. Обтекание профиля с зоной отрыва: Выпускная квалификационная работа бакалавра (научный руководитель: В.Г. Лежнев). – 2015.
3. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1973.
4. Zelenyy A.S. Direct numerical simulation of the airfoil segment's flutter and its effect on the aerodynamic force / A.S. Zelenyy, A.V. Bunyakin // Universal Journal of Applied Mathematics. – 2017. – №5(2). – P. 17–27.