Козицын Вячеслав Алексеевич
студент
Демин Сергей Евгеньевич
канд. физ.-мат. наук, доцент
Нижнетагильский технологический
институт (филиал)
ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет
им. первого Президента России Б.Н. Ельцина»
г. Нижний Тагил, Свердловская область

ВЛИЯНИЕ ТРЕНИЯ НА ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

***Аннотация**: в представленной работе операционным методом исследователями получены уравнения движения заряженной частицы в электрическом поле при наличии трения.*

***Ключевые слова**: электрическое поле, диссипативная функция, уравнения движения.*

Проблема учета реального трения в электродинамических системах является весьма сложной задачей. В данной работе рассматривается модельная задача, позволяющая оценить влияние трения на характер движения заряженных частиц.

Самым простым феноменологическим способом учета диссипативных сил является введения силы трения, линейной по скорости.

При расчетах будем использовать аппарат операционного исчисления, заметно упрощающий математические выкладки.

Пусть некоторая частица заряда e и массой m влетает из начала координат со скоростью $V=(u;v)$ в электрическое поле E, параллельное оси Oy, испытывая при этом сопротивление среды $R=kmV$. Требуется определить положение частицы в произвольный момент времени $t>0$.

Движение в случае отсутствия трения описывается системой уравнений $\begin{cases} mx'' = eE \\ my'' = 0 \end{cases}$, решение которой при начальных условиях $\begin{cases} x(0) = y(0) = 0 \\ x'(0) = u,\ y'(0) = v \end{cases}$, имеет вид:

$$\begin{cases} x(t) = ut + \dfrac{eE}{2m}t^2; \\ y(t) = vt. \end{cases}$$

В случае наличия диссипативных сил уравнение движения заряда в векторном виде имеет вид:

$$m\vec{a} = e\vec{E} - k\vec{V}.$$

Проектируя на оси координат, получим систему двух дифференциальных уравнений, описывающую движение заряженной частицы:

$$\begin{cases} mx'' = eE - kx', \\ my'' = -ky'. \end{cases}$$

при начальных условиях $\begin{cases} x(0) = y(0) = 0, \\ x'(0) = u,\ y'(0) = v. \end{cases}$

Используем для решения системы операционный метод [1–2].

Обозначим $X(p), Y(p), Z(p)$ как изображения искомых функций. Тогда имеем:

$$x(t) \xleftarrow{\bullet} X(p),\quad x'(t) \xleftarrow{\bullet} pX(p),\quad x''(t) \xleftarrow{\bullet} p^2X(p) - u;$$

$$y(t) \xleftarrow{\bullet} Y(p),\quad y'(t) \xleftarrow{\bullet} pY(p),\quad y''(t) \xleftarrow{\bullet} p^2Y(p) - v.$$

Применим преобразование Лапласа [1–3] к каждому из уравнений системы:

$$\begin{cases} m\left(p^2X(p) - u\right) = \dfrac{eE}{p} - kpX(p), \\ m\left(p^2Y(p) - v\right) = -kpY(p). \end{cases}$$

Для нахождения изображений неизвестных функций $X(p)$ и $Y(p)$ решим систему следующих операторных уравнений:

$$\begin{cases} (mp^2 + kp)X(p) = \dfrac{eE}{p} + mu, \\ (mp^2 + kp)Y(p) = mv. \end{cases}$$

Решим полученную систему:

$$\begin{cases} X(p) = \dfrac{eE}{p^2(mp+k)} + \dfrac{mu}{p(mp+k)}; \\ Y(p) = \dfrac{mv}{p(mp+k)}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} X(p) = eE\left(-\dfrac{m}{k^2}\cdot\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{1}{p^2} + \dfrac{m}{k^2}\cdot\dfrac{1}{p+\dfrac{k}{m}}\right) + mu\left(\dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{1}{p+\dfrac{k}{m}}\right); \\ Y(p) = mv\left(\dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{1}{p+\dfrac{k}{m}}\right). \end{cases}$$

Теперь найдем искомые оригиналы, используя теорему смещения

$$\begin{cases} x(t) = eE\left(-\dfrac{m}{k^2} + \dfrac{1}{k}\cdot t + \dfrac{m}{k^2}\cdot e^{-\frac{k}{m}t}\right) + \dfrac{mu}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right); \\ y(t) = \dfrac{mv}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right). \end{cases}$$

Полученные решения удобнее записать в следующем виде:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{m(ku - eE)}{k^2}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) + \dfrac{eE}{k}t; \\ y(t) = \dfrac{mv}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right). \end{cases}$$

В действительности проблема учета реального трения в электродинамических системах намного сложнее этой модельной задачи. Это в первую очередь связано с тем, что реальным механизмом диссипации для электродинамических систем является возникающее при ускорении заряженных частиц тормозное излучение.

Список литературы

1. Пантелеев А.В. Теория функции комплексного переменного и операционного исчисления в примерах и задачах / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова. – М.: МАИ, 1998. – 445 с.

2. Свешников А.Г. Теория функций комплексной переменной / А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. – М.: Наука, 1979. – 320 с.