Баршаков Павел Сергеевич
магистрант
Макоха Анатолий Николаевич
канд. физ.-мат. наук, доцент
ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет»
г. Ставрополь, Ставропольский край

МНОГОПРОДУКТОВАЯ СТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ С ОГРАНИЧЕННОЙ ВМЕСТИМОСТЬЮ СКЛАДА

Аннотация: *многопродуктовая модель рассматривает управление запасами из n различных товаров при ограниченной вместимости склада. Формирование точки оформления нового заказа остается в рамках простых статических моделей, дефицит отсутствует. Главным отличием от других моделей является наличие «конкуренции» за ограниченное складское пространство среди товаров из n. В статье отмечено, что анализ полученных результатов может быть полезен с практической точки зрения.*

Ключевые слова: *модель управления запасами, заказ, уровень запаса, товар, интенсивность спроса, стратегия управления запасами, оптимальный план.*

Данна модель рассматривает задачу управления запасами n различных товаров, которые хранятся на одном складе ограниченной вместимости, предполагается, что дефицит отсутствует. Отличие от других статических моделей состоит в том, что товары конкурируют между собой за ограниченное складское пространство.

Определим для товара i, $i = 1,2,\dots,n$, следующие параметры:

D_i – интенсивность спроса;

K_i – стоимость размещения заказа;

h_i – стоимость хранения единицы товара в единицу времени;

y_i – объем заказа;

a_i – необходимое пространство для хранения единицы товара;

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

A – максимальное складское пространство для хранения товаров n видов.

При отсутствии дефицита математическая модель сформулированной задачи имеет следующий вид.

$$TCU(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{K_i D_i}{y_i} + \frac{h_i y_i}{2}\right)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} a_i y_i \le A, y_i > 0, i = 1,2, \dots, n.$$

Алгоритм решения этой задачи можно описать следующим образом.

Шаг 1. Вычисляются оптимальные объемы заказов без учета ограничения по вместимости склада:

$$y_i^* = \sqrt{\frac{2K_i D_i}{h_i}}, i = 1,2, \dots, n.$$

Шаг 2. Осуществляется проверка, удовлетворяют ли найденные значения y_i^* ограничению по вместимости склада. Если «Да», вычисления заканчиваются, при этом значения $y_i^*, i = 1,2, \dots, n$ являются оптимальными. В противном случае следует перейти к шагу 3.

Шаг 3. Ограничение по вместимости склада должно удовлетворяться в форме равенства. Используется метод множителей Лагранжа для определения оптимальных объемов заказа для задачи с ограничением.

На шаге 3 строится функция Лагранжа

$$L(\lambda, y_1, y_2, \dots, y_n) = TCU(y_1, y_2, \dots, y_n) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_i - A\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{K_i D_i}{h_i} + \frac{h_i y_i}{2}\right) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_i - A\right),$$

где $\lambda(< 0)$ – множитель Лагранжа.

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Так как функция Лагранжа является выпуклой, оптимальные значения y_i, и λ находятся из следующих уравнений, которые представляют собой необходимые условия экстремума функции Лагранжа.

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = -\frac{K_i D_i}{y_i^2} + \frac{h_i}{2} - \lambda a_i = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -\sum_{i=1}^{n} a_i y_i + A = 0.$$

Второе уравнение показывает, что ограничение по вместимости склада в оптимальной точке должно удовлетворяться в форме равенства.

Из первого уравнения следует, что

$$y_i^* = \sqrt{\frac{2K_i D_i}{h_i - 2\lambda^* a_i}}.$$

Полученная формула показывает, что y_i^* зависит от оптимального значения λ^* множителя Лагранжа. Кроме того, при $\lambda^* = 0$ значение y_i^* является решением задачи без ограничения.

Результат

Анализ модели стоит проводить на примере, данные которого находятся в таблице 1.

Таблица 1

Исходные данные для моделирования (пример)

Номер товара	Спрос	Стоимость размещения заказа	Стоимость хранения ед. продукции	Занимаемый объем ед. продукции
1	2	10	0.3	1
2	4	5	0.1	1
3	4	15	0.2	1

В результате был получен оптимальный план (представлен ниже), который демонстрирует работу модели. Полученный результат позволяет получить

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

наиболее оптимальный план заказа из n товаров. Попробуем увеличить стоимость хранения третьего товара до 0.6 у.е. (остальные величины оставим без изменений).

$$y_1^* = 6.35, y_2^* = 7.11, y_3^* = 11.6$$

Таблица 2

Измененные данные для моделирования

Номер товара	Спрос	Стоимость размещения заказа	Стоимость хранения ед. продукции	Занимаемый объем ед. продукции
1	2	10	0.3	1
2	4	5	0.1	1
3	4	15	0.6	1

После очередного моделирования были получены значения объема заказа для трех товаров:

$$y_1^* = 6.82, y_2^* = 7.78, y_3^* = 10.17$$

Таблица 3

	y_1^*	y_2^*	y_3^*
Результат первого моделирования	6.35	7.11	11.6
Результат второго моделирования	6.82	7.78	10.17

Несложно заметить, что объем заказа третьего товара снизился после изменения величины стоимости хранения единицы продукции до 0.6 у.е. Данное изменение сместило уровень заказа в сторону первого и второго товара (освобожденный объем распределяется на все товары). Обратная операция (уменьшение издержек – представлена в таблице 4) приведет к увеличению объема изменяемого товара – это указывает на один из принципов оптимальности данной модели и позволяет управлять общей эффективностью.

Таблица 4

Данные для третьего моделирования

Номер товара	Спрос	Стоимость размещения заказа	Стоимость хранения ед. продукции	Занимаемый объем ед. продукции
1	2	10	0.1	1
2	4	5	0.1	1

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

3	4	15	0.2	1

Проведенное моделирование закончилось с результатом:

$$y_1^* = 6.82, y_2^* = 6.82, y_3^* = 11.18$$

Сравним полученный результат с результатом исходного примера.

Таблица 5

	y_1^*	y_2^*	y_3^*
Результат первого моделирования	6.35	7.11	11.6
Результат третьего моделирования	6.82	6.82	11.18

Уменьшение стоимости хранения третьего товара до 0.1 у.е. привело к росту его объема заказа за счет сокращения величины заказа первого и второго товаров. Данное явление вполне ожидаемо и является обратным процессом для результатов второго моделирования.

Список литературы

1. Таха, Хэмди, А. Введение в исследование операций. 6-е издание.: Пер. с англ. – М.: Вильямс, 2001. – 912 с.

2. Бродецкий Г.Л. Управление запасами: Учебное пособие. (Полный курс MBA.) – М.: Эксмо, 2008. – 352 с.

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)