Аванесян Диана Робертовна
учитель математики и информатики
МБОУ «СОШ №3» г. Михайловска
г. Михайловск, Ставропольский край
магистрант
ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет»
г. Ставрополь, Ставропольский край
Роженко Ольга Дмитриевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет»
г. Ставрополь, Ставропольский край

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

***Аннотация**: в представленной статье исследователями рассматриваются различные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.*

***Ключевые слова**: линейная алгебра, рациональность, метод, фундаментальная система, переменные, матрица, вектор, решение.*

Определения, понятия, обозначения.

Рассмотрим системы из q линейных алгебраических уравнений с k неизвестными переменными (может быть q = k) вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k = b_1 \\ \quad\quad\quad\quad \dots \\ a_{q1}x_1 + a_{q2}x_2 + \cdots + a_{qk}x_k = b_q \end{cases}$$

$x_1, x_2 \dots x_k$ – переменные, a_{ij}, *i=1,2,…,q,j=1,2,…,n – коэффициенты,* $b_{1,} b_{2,} \dots, b_k$ *– свободные члены.*

Такую форму записи СЛАУ называют координатной.

В матричной форме эта система уравнений имеет вид

$$A \cdot X = B,$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qk} \end{pmatrix}$ – основная матрица системы, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ – матрица неизвестных переменных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$ – матрица свободных членов.

Если система уравнений имеет хотя бы одно решение, то она называется *совместной*.

Если система уравнений решений не имеет, то она называется *несовместной*.

Если СЛАУ имеет единственное решение, то ее называют *определенной*; если решений больше одного, то – *неопределенной*.

Если свободные члены всех уравнений системы равны нулю $b_1 = b_2 \ldots = = b_k = 0$, то система называется *однородной*, в противном случае – *неоднородной*.

Решение элементарных систем линейных алгебраических уравнений.

Если число уравнений системы равно числу неизвестных переменных и определитель ее основной матрицы не равен нулю, то такие СЛАУ будем называть *элементарными*.

Основными методами решения элементарных систем линейных уравнений являются метод Крамера, матричный метод и метод Гаусса. Разберем их. Решение систем линейных уравнений методом Крамера.

Пусть нам требуется решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}\mathrm{x}_1 + a_{12}\mathrm{x}_2 + \cdots + a_{1k}\mathrm{x}_k = b_1 \\ \ldots \\ a_{q1}\mathrm{x}_1 + a_{q2}\mathrm{x}_2 + \cdots + a_{qk}\mathrm{x}_k = b_q \end{cases}$$

в которой число уравнений равно числу неизвестных переменных и определитель основной матрицы системы отличен от нуля, то есть, $|A| \neq 0$.

Пусть Δ – определитель основной матрицы системы, а $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \ldots, \Delta_{x_k}$ – определители матриц, которые получаются из A заменой *1-ого, 2-ого, …, k-ого* столбца соответственно на столбец свободных членов.

При таких обозначениях неизвестные переменные вычисляются по формулам метода Крамера как $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_k = \frac{\Delta_{x_k}}{\Delta}$. Так находится решение системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера.

Решение систем линейных алгебраических уравнений матричным методом (с помощью обратной матрицы).

Пусть система линейных алгебраических уравнений задана в матричной форме $A \cdot X = B$, где матрица A имеет размерность k на k и ее определитель отличен от нуля.

Так как $|A| \neq 0$, то матрица A – обратима, то есть, существует обратная матрица A^{-1}. Если умножить обе части равенства $A \cdot X = B$ на A^{-1} слева, то получим формулу для нахождения матрицы-столбца неизвестных переменных $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$. Так мы получили решение системы линейных алгебраических уравнений матричным методом.

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Суть метода Гаусса состоит в последовательном исключении неизвестных переменных: сначала исключается x_1 из всех уравнений системы, начиная со второго, далее исключается x_2 из всех уравнений, начиная с третьего, и так далее, пока в последнем уравнении останется только неизвестная переменная x_k. Такой процесс преобразования уравнений системы для последовательного исключения неизвестных переменных называется *прямым ходом метода Гаусса*. После завершения прямого хода метода Гаусса из последнего уравнения находится x_k, с помощью этого значения из предпоследнего уравнения вычисляется $x_{k\text{-}1}$, и так далее, из первого уравнения находится x_1. Процесс вычисления неизвестных переменных при движении от последнего уравнения системы к первому называется *обратным ходом метода Гаусса*.

Таким образом, мы рассмотрели три метода решения систем линейных уравнений. Помимо этих методов существуют так же:

– решение системы линейных уравнений методом подстановки («школьный метод»);

– решение системы методом почленного сложения (вычитания) уравнений системы;

– графический метод.

Список литературы

1. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры / А.И. Мальцев. – М.: Наука, 1975.

2. Ильин В.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / В.А. Ильин, Г.Д. Ким. – М.: ТК Велби; Проспект, 2007. – 400 с.

3. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре / И.М. Гельфанд. – М.: Наука, 1971.

4. Решение систем линейных алгебраических уравнений, методы решения, примеры [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.cleverstudents.ru/systems/solving_systems_of_linear_equations.html (дата обращения: 26.06.2017).