Бондаренко Татьяна Евгеньевна

канд. пед. наук, доцент

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный

педагогический университет»

г. Воронеж, Воронежская область

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ВУЗА К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМЫ НА УРОКЕ ГЕОМЕТРИИ

***Аннотация**: в данной статье рассмотрены методические особенности работы над формулировкой теоремы и её доказательством в процессе подготовки учителя к уроку геометрии. Представлены этапы изучения теоремы, проиллюстрированные на отдельных примерах.*

***Ключевые слова**: теорема, доказательство теоремы, геометрия.*

Исследования качества подготовки учащихся по геометрии, в том числе по результатам ЕГЭ, позволяют утверждать, что уровень их знаний и сформированность умения решать задачи остаются низкими. В связи с этим актуальна проблема совершенствования методики обучения геометрии. Одно из направлений такой работы состоит в обеспечении школы математически и методически грамотными учителями. Анализ уроков, проведённых студентами на педагогической практике, позволяет утверждать, что как правило, они ограничиваются пересказом учебника, недостаточно задумываясь над методическими аспектами изложения учебного материала. Поэтому очевидна необходимость усиления методической направленности обучения. С этой целью были выявлены этапы работы над методическим обеспечением изучения теоремы на уроке. Перечислим их.

1. Подготовка к изучению теоремы.

1.1. Выявление знаний, необходимых для усвоения теоремы.

1.2. Составление дидактических материалов, способствующих их актуализации.

2. Работа над условием теоремы.

2.1. Обоснование (мотивировка) необходимости изучения теоремы.

Характеристика роли теоремы.

2.2. Обеспечение средств, способствующих самостоятельному открытию учащимися математического факта, сформулированного в теореме.

2.3. Иллюстрация существенности основных элементов формулировки, учёт возможных ошибок, подготовка соответствующих контрпримеров.

2.4. Оформление чертежа, записи условия и заключения теоремы в форме «дано», «доказать».

3. Работа над доказательством теоремы.

3.1. Разработка средств, способствующих самостоятельному отысканию доказательства учащимися.

3.2. Анализ метода, идеи, приёма доказательства теоремы.

3.3. Составление алгоритма доказательства.

3.4. Оформление записи доказательства.

3.5. Обсуждение других способов доказательства теоремы.

4. Составление комплекса учебных задач для усвоения теоремы.

Проиллюстрируем реализацию представленных этапов на примере изучения первого признака равенства треугольников по учебнику А.В. Погорелова [2, с. 28].

1.1. В доказательстве теоремы используется:

– аксиома откладывания отрезков (VI), [2, с. 10];

– аксиома откладывания углов (VII), [2, с. 10];

– определение равных треугольников [2, с. 11];

– аксиома существования треугольника, равного данному (VIII), [2, с. 12];

– аксиома о единственности прямой, проходящей через две точки (I); [2, с. 4].

1.2. В соответствии с приведённым списком учащимся могут быть предложены следующие задания для актуализации знаний.

№1. На полупрямой *a*, от её начальной точки В отложили два равных отрезка *BM* и *BK*. Что можно сказать о точках *M* и *K*? Обоснуйте ответ.

№2. От полупрямой *a*, в одну и ту же полуплоскость отложены два равных угла (*ав*) и (*ас*). Что можно сказать о лучах *а* и *с*? Обоснуйте ответ.

№3. Сформулируйте аксиому существования треугольника, равного данному.

№4. Что означает выражение «Треугольник *DAK* равен треугольнику *MNB*»?

2.1. По определению равенство треугольников предполагает наличие шести пар равных элементов, признак сокращает их в 2 раза: до трёх пар равных элементов. Теорема играет важнейшую роль в курсе планиметрии, так как рассмотрение цепочки равных треугольников станет основным методом доказательства.

2.2. Для самостоятельного открытия факта, сформулированного в теореме, учащимся предварительно может быть предложена практическая работа.

1 вариант.

Используя чертёжный треугольник с углом 60°, постройте треугольник *ABC*, такой что $AB = 10$ см, $AC = 12$ см, $\angle A = 60°$.

2 вариант.

Используя чертёжный треугольник с углом 60°, постройте треугольник $A_1B_1C_1$, такой что $A_1B_1 = 10$ см, $A_1C_1 = 12$ см, $\angle A_1 = 60°$.

На уроке, измеряя стороны и углы, учащиеся придут к выводу о равенстве этих треугольников по определению.

2.3. В формулировке теоремы существенно, что угол лежит *между* равными сторонами. Проиллюстрируем это требование на следующем примере.

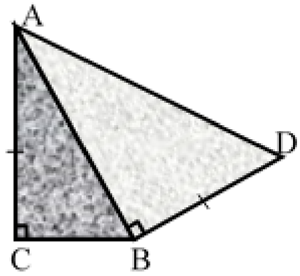

Рис. 1

Данные прямоугольные треугольники (рис. 1) имеют общую сторону AB, равные стороны AC и BD и равные углы C и B. Не выполнено существенное условие теоремы: равные углы не лежат между равными сторонами. Очевидно, что треугольники не равны.

2.4. Дано: $\Delta\, ABC$ и $\Delta\, A_1B_1C_1$.

$AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$,

$\angle A = \angle A_1$.

Доказать: $\Delta\, ABC = \Delta\, A_1B_1C_1$.

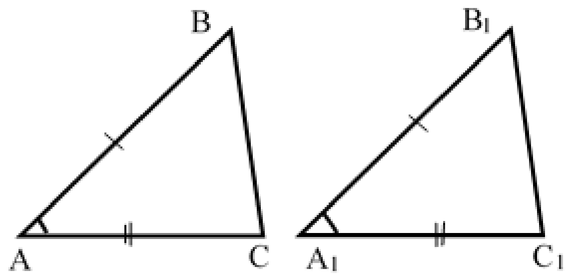

Рис. 2

3.1. Самостоятельное доказательство теоремы учащимися в данном случае невозможно в связи с полным отсутствием опыта и сложностью метода доказательства.

3.2. Метод доказательства состоит в рассмотрении третьего треугольника.

$A_2B_2C_2$, равного треугольнику ABC и совпадающего с треугольником $A_1B_1C_1$.

3.3. Алгоритм доказательства:

1. Утверждаем существование треугольника $A_2B_2C_2$, равного треугольнику ABC и определённым образом расположенного относительно треугольника $A_1B_1C_1$.

2. Доказываем совпадение треугольников $A_2B_2C_2$ и $A_1B_1C_1$.

3. Делаем вывод о равенстве треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

3.4. Доказательство.

1. По аксиоме VIII существует $\Delta\, A_2B_2C_2 = \Delta\, ABC$:

– вершина A_2 совпадает с вершиной A_1;

– вершина C_2 принадлежит лучу A_1C_1;

– вершина B_2 лежит в одной полуплоскости с вершиной B_1 относительно прямой A_1C_1 (рис. 3).

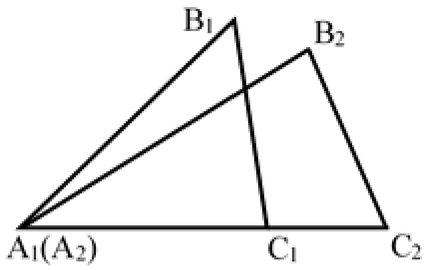

Рис. 3

2. Докажем, что вершины C_1 и C_2 совпадают.

$A_1C_1 = AC$ (по условию),

$AC = A_2C_2$ (так как $\Delta A_2B_2C_2 = \Delta ABC$).

$A_1C_1 = A_2C_2$.

Следовательно, по аксиоме откладывания отрезков точки C_1 и C_2 совпадают.

Коррекция чертежа.

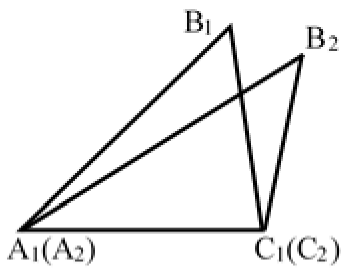

Рис. 4

3. Докажем, что лучи A_1B_1 и A_2B_2 совпадают.

$\angle A = \angle A_1$ (по условию),

$\angle A = \angle A_2$ (так как $\Delta A_2B_2C_2 = \Delta ABC$).

$\angle A_1 = \angle A_2$.

Следовательно, по аксиоме откладывания углов лучи A_1B_1 и A_2B_2 совпадают.

Коррекция чертежа.

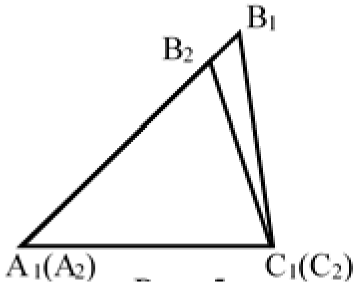

Рис. 5

4. Докажем, что вершины B_1 и B_2 совпадают.

Доказательство аналогично пункту (1)

Коррекция чертежа.

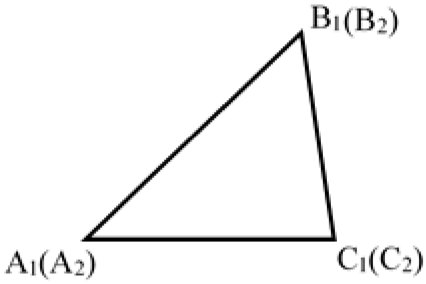

Рис. 6

5. Вывод. По аксиоме о единственности прямой, проходящей через две точки, треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ совпали. По сути это два имени одного и того же треугольника. Так как $\Delta\ A_2B_2C_2 = \Delta\ ABC$, то и $\Delta\ A_1B_1C_1 = \Delta\ ABC$. Что и требовалось доказать.

3.5. Иные способы доказательства не рассматриваем.

4. Приведём примеры задач по готовым чертежам, способствующих усвоению первого признака равенства треугольников.

Найти пары равных треугольников и доказать их равенство [3, с. 7].

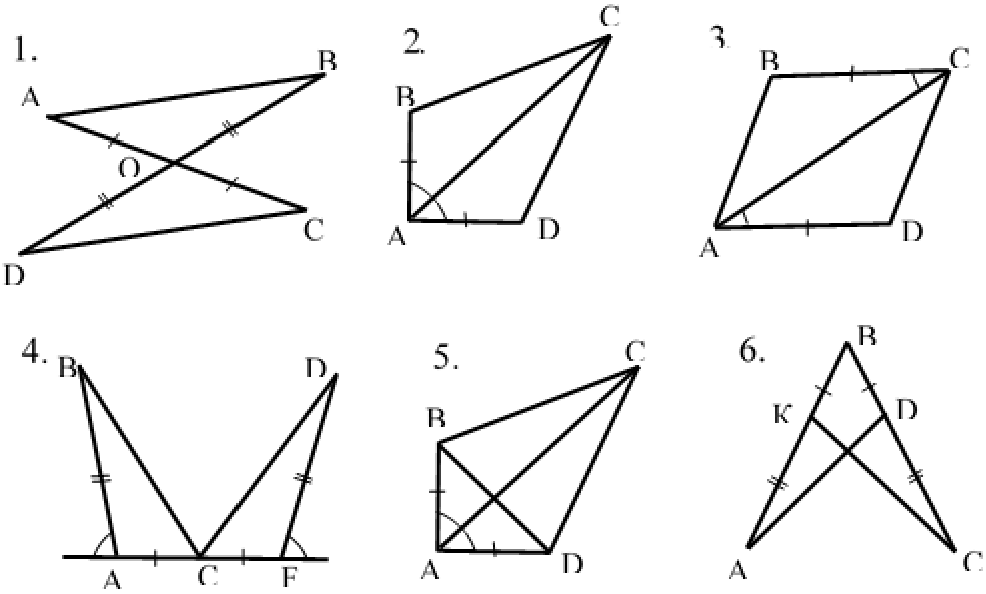

Рис. 7

В приведённых материалах не представлены пункты 3.1 (разработка средств, способствующих самостоятельному отысканию доказательства учащимися) и 3.5 (обсуждение других способов доказательства теоремы). Проиллюстрируем их на других теоремах. Например, для самостоятельного доказательства учащимися теоремы о пропорциональности отрезков хорд [2, с. 154], [1, с. 173] учитель может воспользоваться методом восходящего анализа.

Для самостоятельного доказательства теоремы школьниками могут быть предложены вопросы:

1. Что достаточно доказать, чтобы равенство $AO \cdot OB = CO \cdot OD$ (рис. 8) было верно? Ответ: что верно равенство $\frac{AO}{CO} = \frac{OD}{OB}$.

2. Следствием какого утверждения может быть равенство $\frac{AO}{CO} = \frac{OD}{OB}$?

Ответ: такое равенство может быть получено из подобия треугольников. Вывод: выполняем дополнительное построение (рис. 9).

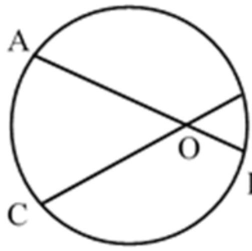

Рис. 8

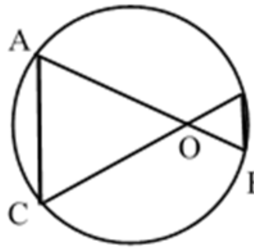

Рис. 9

3. Будут ли треугольники *OAC* и *ODB* подобны?

Ответ: да, так как они имеют две пары равных углов.

Доказательство найдено самостоятельно, переходим к его записи.

Проиллюстрировать различные способы доказательства можно на примере теоремы о сумме углов треугольника в учебниках [1, с. 70; 2, с. 46]. В учебнике [1] такая сумма сводится к 180° посредством развёрнутого угла, а в учебнике [2] – посредством односторонних углов при параллельных прямых.

В заключение выразим надежду, что методическая направленность подготовки будущего учителя к доказательству теорем в школе будет способствовать более качественному обучению геометрии.

Список литературы

1. Геометрия. 7–9: учебник для общеобразовательных учреждений / Л.С. Атанасян [и др.]. – М.: Просвещение, 2013. – 255 с.

2. Погорелов А.В. Геометрия. 7–9 кл.: Учебник для общеобразовательных учреждений / А.В. Погорелов. – 13-е изд. – М.: Просвещение, 2012. – 224 с.

3. Полонский В.Б. Геометрия: задачник к школьному курсу / В.Б. Полонский, Е.М. Рабинович, М.С. Якир. – М.: Аст-Пресс: Магистр-S, 1998. – 252 с.