Яблонский Дмитрий Владимирович

канд. техн. наук, доцент

Арзамасский филиал

ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский

Нижегородский государственный

университет им. Н.И. Лобачевского»

г. Арзамас, Нижегородская область

УСТОЙЧИВОСТЬ ГИБРИДНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

***Аннотация**: в работе рассматривается класс гибридных стохастических систем, описываемых семейством стохастических дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом запаздывающего типа. Каждая отдельная система семейства определяет определенный режим гибридной системы. Переходы между отдельными режимами описываются однородной цепью Маркова. Получены достаточные условия, которые гарантируют робастную устойчивость системы в смысле асимптотической устойчивости в среднем квадратическом при произвольной величине запаздывания и произвольных вероятностях переходы между режимами.*

***Ключевые слова**: гибридная система, стохастическая система, запаздывание, робастная устойчивость, линейные матричные неравенства.*

Введение

В последние годы наблюдается рост исследовательского интереса к процессам и системам, математические модели которых описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, параметры которых – случайные функции времени. Особо выделяют класс гибридных систем, особенностью которых является наличие в пространстве состояний двух компонент: дискретной и непрерывной. В тоже время многие реальные процессы в природе и технике имеют последействие, т.е. их поведение определяется состоянием не только в текущий момент, но и в предшествующие моменты времени. Типичной гибридной системой с запаздыванием является динамическая система массового обслуживания управляемая на расстоянии Примеры показывают, что поведение систем без учета запаздывания, даже при малой его величине, может существенно отличаться от поведения систем с запаздывающим аргументом. Отсюда вытекает необходимость и важность изучения систем с запаздыванием.

1. Постановка задачи

Рассмотрим гибридную стохастическую систему, описываемую уравнением:

$$\begin{gathered} dx(t)=\left[\mathbf{A}(r_t)x(t)+\mathbf{A}_\tau(r_t)x(t-\tau)\right]dt+ \\ \left[\mathbf{D}(r_t)x(t)+\mathbf{D}_\tau(r_t)x(t-\tau)\right]dw(t), \end{gathered} \tag{1}$$

где $0<\tau<\infty$ – постоянное запаздывание; $w(t)$ – не зависящий от начального состояния системы (1) стандартный винеровский процесс; $\mathbf{A}(r_t)$, $\mathbf{A}_\tau(r_t)$, $\mathbf{D}(r_t)$, $\mathbf{D}_\tau(r_t)$ – постоянные матрицы размеров $n\times n, n\times n, n\times n, n\times n$; $x(t)$ – n-мерный вектор состояния; r_t – марковская цепь с дискретным множеством состояний $\mathrm{IN}=\{1,2,...,\nu\}$ и матрицей вероятностей перехода $\mathbf{P}(\Delta)=\left[\mathrm{P}_{ij}(\Delta)\right]_1^\nu$:

$$\mathrm{P}_{ij}(\Delta)=\mathrm{P}\left\{r(t+\Delta)=j\,|\,r_t=i\right\}=\begin{cases} q_{ij}(\Delta)+o(\Delta) & i\neq j \\ 1+q_{ii}(\Delta)+0(\Delta) & i=j \end{cases}$$

где $q_{ij}\geq 0$, $(i\neq j)$, $q_{ii}=-\sum_{j\neq i}^{\nu}q_{ij}$ и q_{ij} $(i,j\in\mathrm{IN})$ называются интенсивностями перехода.

Рассмотрим скалярную функцию $V(x,i)$ $(x\in\mathrm{IR}^n, i\in\mathrm{IN})$ и определим оператор

$$LV(x,i)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\left[E\left\{V(x(t+\Delta),r(t+\Delta))\,|\,x_t=x,r_t=i\right\}-V(x,i)\right],$$

где E – оператор математического ожидания. Этот оператор называется слабым инфинитезимальным оператором процесса $X=\left[x_t,r_t\right]$ или производящим дифференциальным оператором.

Цель представленной работы получить достаточные условия асимптотической устойчивости в среднем квадратическом (АУСК) системы (1) при произвольном запаздывании и произвольных интенсивностях перехода между режимами $q_{ij}\ (i, j \in \mathrm{IN})$.

2. Основной результат

При исследовании устойчивости систем с запаздыванием будем использовать сравнение исходной системы с некоторой системой без запаздывания, которую будем называть системой сравнения.

Рассмотрим «укороченную» систему сравнения без запаздывания, которая описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}(i)x(t), \tag{2}$$

где *x(t)* – *n*-мерный вектор состояния; $A(i)$ – матрица состояния размера $n \times n$.

Выберем функционал Ляпунова-Красовского в форме:

$$V(x,i) = V(x) = x^T(t)\mathbf{H}x(t) + \int_{-\tau}^{0} x^T(t+\eta)\mathbf{Q}x(t+\eta)\,d\eta, \tag{3}$$

тогда для стохастического процесса $\{x_t, r_t\}$ определенного уравнением (2), имеем:

$$LV(x) = x^T(t)\left[\mathbf{A}^T(i)\mathbf{H} + \mathbf{HA}(i)\right]x(t) + x^T(t)\mathbf{Q}x(t) - x^T(t-\tau)\mathbf{Q}x(t-\tau) \le$$
$$\le x^T(t)\left[\mathbf{A}^T(i)\mathbf{H} + \mathbf{HA}(i) + \mathbf{Q}\right]x(t).$$

Производящий дифференциальный оператор $LV < 0$, если выполняется неравенство:

$$\mathbf{A}^T(i)\mathbf{H} + \mathbf{HA}(i) + \mathbf{Q} < 0. \tag{4}$$

Это означает, что для положительно определенной симметричной матрицы $\mathbf{M}(i) = \mathbf{M}^T(i)$ имеет место равенство:

$$\mathbf{A}^T(i)\mathbf{H} + \mathbf{HA}(i) + \mathbf{Q} = -\mathbf{M}(i), \tag{5}$$

Из уравнения (5) получаем:

$$\mathbf{A}^T(i)\mathbf{H} + \mathbf{HA}(i) = -\mathbf{Q} - \mathbf{M}(i) = -\mathbf{N}(i). \tag{6}$$

Характерно, что уравнение (6) обеспечивает экспоненциальную устойчивость в среднем квадратическом (ЭУСК) укороченной системы сравнения (2) при произвольных интенсивностях перехода $q_{ij}\left(i, j \in \mathrm{IN}\right)$.

Теперь рассмотрим систему (1). Пусть система (2) ЭУСК при произвольных q_{ij}, в этом случае, выбирая функционал Ляпунова-Красовского в виде (3) для производящего дифференциального оператора, имеем:

$$
\begin{gathered}
LV\left(x\right) = x^T\left(t\right)\mathbf{A}^T\left(i\right)\mathbf{H}x\left(t\right) + x^T\left(t-\tau\right)\mathbf{A}_\tau^T\left(i\right)\mathbf{H}x\left(t\right) + \\
+x^T\left(t\right)\mathbf{HA}\left(i\right)x\left(t\right) + x^T\left(t\right)\mathbf{HA}_\tau x\left(t-\tau\right) + \\
+\left[\mathbf{D}\left(i\right)x\left(t\right) + \mathbf{D}_\tau\left(i\right)x\left(t-\tau\right)\right]^T \mathbf{H}\left[\mathbf{D}\left(i\right)x\left(t\right) + \mathbf{D}_\tau\left(i\right)x\left(t-\tau\right)\right] + \\
+x^T\left(t\right)\mathbf{Q}x\left(t\right) - x^T\left(t-\tau\right)\mathbf{Q}x\left(t-\tau\right) = \\
x^T\left(t\right)\left[\mathbf{A}^T\left(i\right)\mathbf{H} + \mathbf{HA}\left(i\right) + \mathbf{Q}\right]x\left(t\right) + x^T\left(t-\tau\right)\mathbf{A}_\tau^T\left(i\right)\mathbf{H}x\left(t\right) + x^T\left(t\right)\mathbf{HA}_\tau x\left(t-\tau\right) + \\
+\left[\mathbf{D}\left(i\right)x\left(t\right) + \mathbf{D}_\tau\left(i\right)x\left(t-\tau\right)\right]^T \mathbf{H}\left[\mathbf{D}\left(i\right)x\left(t\right) + \mathbf{D}_\tau\left(i\right)x\left(t-\tau\right)\right] - x^T\left(t-\tau\right)\mathbf{Q}x\left(t-\tau\right) = \\
= \begin{bmatrix} x\left(t\right) \\ x\left(t-\tau\right) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{D}^T\left(i\right)\mathbf{HD}\left(i\right) - \mathbf{M}\left(i\right) & \mathbf{HA}_\tau\left(i\right) + \mathbf{D}^T\left(i\right)\mathbf{HD}_\tau\left(i\right) \\ \mathbf{A}_\tau^T\left(i\right)\mathbf{H} + \mathbf{D}_\tau^T\left(i\right)\mathbf{HD}\left(i\right) & -\mathbf{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x\left(t\right) \\ x\left(t-\tau\right) \end{bmatrix}
\end{gathered}
$$

Производящий дифференциальный оператор *LV(x)* отрицателен лишь в том случае, когда квадратичная форма является отрицательно определенной на решениях *x(t),* а по совокупности всех переменных (по совокупности $x\left(t\right)$, $x\left(t-\tau\right)$) остается неположительно определенной.

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема. Если для некоторых, положительно определенной симметричной матрицы M*(i) и постоянной положительно определенной симметричной матрицы Q существует положительно определенное решение* $\mathbf{H} = \mathbf{H}^T$ *системы уравнений*

$$\mathbf{A}^T\left(i\right)\mathbf{H} + \mathbf{HA}\left(i\right) + \mathbf{Q} = -\mathbf{M}\left(i\right), \tag{7}$$

удовлетворяющее системам неравенств

$$\mathbf{D}^T\left(i\right)\mathbf{HD}\left(i\right) - \mathbf{M}\left(i\right) < 0 \quad \left(i \in \mathrm{IN}\right) \tag{8}$$

$$\mathbf{G}(i)=\begin{bmatrix}\mathbf{D}^{T}(i)\mathbf{HD}(i)-\mathbf{M}(i) & \mathbf{HA}_{\tau}(i)+\mathbf{D}^{T}(i)\mathbf{HD}_{\tau}(i)\\ \mathbf{A}_{\tau}^{T}(i)\mathbf{H}+\mathbf{D}_{\tau}^{T}(i)\mathbf{HD}(i) & -\mathbf{Q}\end{bmatrix}\le 0\,(i\in \mathrm{IN}) \quad (9)$$

то система (1) АУСК при произвольной величие запаздывания τ *и произвольных интенсивностях перехода* q_{ij}.

Заключение

В статье рассматривались гибридные стохастические системы с отклоняющимся аргументом запаздывающего типа. Были получены достаточные условия асимптотической устойчивости в среднем квадратическом при произвольном запаздывании и произвольных интенсивностях переходов между отдельными режимами. Используя аналогичные результаты в работах [3–6] получены алгоритмы синтеза робастного стабилизирующего управления.

Список литературы

1. Красовский Н.Н. О применении второго метода Ляпунова для уравнений с запаздываниями времени // Прикладная математика и механика. – 1956. – Т. 20. – №2. – С. 315–327.

2. Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л.Э. Эльсгольц, С.Б. Норкин. – М.: Наука, 1971. – 296 с.

3. Яблонский Д.В. Применение алгоритмов синтеза робастного стабилизирующего управления гибридными системами с запаздыванием к решению технических задач // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. – 2012. – №14. – С. 197–202.

4. Яблонский Д.В. Устойчивость и управление гибридными системами с запаздыванием / Д.В. Яблонский. – Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. – 105 с.

5. Яблонский Д.В. Робастное субоптимальное управление гибридными системами с запаздыванием // Тенденции и перспективы развития современного

научного знания: Материалы XIII Международной научно-практической конференции / Научно-информационный издательский центр «Институт стратегических исследований», 2014. – С. 45–50.

6. Pakshin P.V., Yablonskii D.V. Robust stability and control of hybrid stochastic systems with time // European Control Conference, ECC 1999. – Conference Proceedings. – 1999. – С. 2164–2169.