Матвеева Елена Петровна

канд. пед. наук, доцент

ФГБОУ ВО «Уральский государственный

педагогический университет»

г. Екатеринбург, Свердловская область

О ПОСТРОЕНИИ МОДЕЛЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ И ТЕОРЕМ

Аннотация*: в статье рассматривается возможность построения моделей математических объектов. Приводятся примеры построения моделей определения и теоремы и их дальнейшего использования. Показано, что модели определений (понятий, теорем и т. д.) позволяют фиксировать внимание учащихся на необходимых элементах, составляющих их основу, акцентировать роль каждого элемента, устанавливать связи между этими элементами.*

Ключевые слова*: математическая модель, математические объекты, модель определения, модель теоремы.*

Прикладная направленность математического образования становится все более востребованной современным обществом. Это можно заметить по содержанию ФГОС, в котором само понятие «модель» – относится к основному изучаемому понятию (в рамках «формирования представления» о ней и ее свойствах). Кроме того, к фразе «формирование представлений о математике как о методе познания действительности» можно добавить – «с помощью математического моделирования».

Всякое приложение математики сопровождается процессом математического моделирования, которое схематически включает формализацию задачи, построение математической модели, исследование (решение математической задачи) и использование результатов для содержательной интерпретации (ответ на вопрос исходной задачи). «Эта процедура требует сочетания неформального мышления с формальным и потому обычно вызывает затруднения у учащихся, что хорошо видно при решении ими даже самых простых текстовых задач» [5, с. 8]. Разрешение возникающих затруднений возможно при систематическом применении метода моделирования при изучении различных разделов математики. При этом этап построения модели является самым сложным в процессе.

Под математической моделью обычно понимают математические объекты: геометрические фигуры, функции, уравнения и т. п., что не совсем корректно, с нашей точки зрения. Например, равенство S = VT может задавать зависимость пути от времени и скорости или стоимость количества продукта с данной себестоимостью. Прочтение формулы определяется интерпретацией входящих в нее величин. В данном случае абстрагирование, являясь характеристикой математического метода, создает сложность при изучении конкретных процессов. Следовательно, необходимо специально обращать внимание обучающихся на описание величин, их свойств, возможных связей.

Традиционная установка на обучение моделированию с помощью стандартных моделей других предметных областей (при решении текстовых задач) отвлекает учащихся от усвоения собственно математического материала и затрудняет формирование умения строить математические модели. Следовательно, эти стандартные модели могут привлекаться, в основном, для установления и фиксации межпредметных связей.

Формирование умения строить и использовать математические модели необходимо осуществлять с помощью построения математических *моделей математических объектов*. Определения, теоремы, леммы, утверждения и т. п. по праву относятся к математическим объектам и могут быть представлены в виде математической модели. Это возможно, так как они: 1) легко структурируются согласно цели; 2) не содержат отвлекающей информации. И лишь после этого полученные умения используются, при необходимости, для решения, например, сюжетных задач.

Ю.Б. Мельников определяет *модель как «систему из двух компонентов: модельно-содержательного*, формализующего образ прототипа (т. е. моделируемого объекта) *и интерфейсного*, формализующего механизм обмена информацией между прототипом и его образом [4, с. 190]. Модельно-содержательный включает носитель, системы характеристик и отношений модели. Структура этих компонентов подробно описана [4, с. 190]. Учебная деятельность, направленная на обучение построению моделей, должна содержать следующий *комплекс действий*: *определения цели построения модели; выделения элементов математического объекта в соответствии с целью; выделения системы характеристик модели; составления системы отношений модели; сопоставление цели и результата* [2].

Покажем, как применяется предложенный комплекс действий при работе с определением.

В качестве примера рассмотрим определение монотонности функции: «Функцию $y = f(x)$ называют возрастающей (убывающей) на множестве $X \subset D(f)$, если для любых двух точек x_1 и x_2 множества X, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$)».

Определим цель построения модели: построение модели определения возрастающей (убывающей) функции для его дальнейшего использования при решении учебных задач. Выделим носитель модели (элементы): $y = f(x)$, $X \subset D(f)$, $D(f)$, X; любые x_1, x_2 из множества X, $f(x_1)$, $f(x_2)$. В систему характеристик будет входить операция сравнения значений функции, а также выбор аргументов по правилу: $x_1 < x_2$. Тогда систему отношений будет составлять соотношение между сравнением аргументов и сравнением их соответствующих значений функций: $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)(1)$ [$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)(2)$]. Результатом выполненных действий будет заключение о полученном виде монотонности функции, что представляет собой действие контроля соответствия цели и вывода.

Практика показывает, что, следуя формулировке определения, учащиеся пытаются применять определение к конкретным значениям аргумента. Понять, что «выбираем «любые» значения $x_1 < x_2$ из множества X» как раз и означает простую запись $x_1 < x_2$, позволяет работа с элементами определения и нахождение связи между ними. Представленная модель позволяет создать алгоритм исследования функции на монотонность по определению. Алгоритм, по сути, представляет собой последовательность действий получения из данных результата. Потому, согласно модели, результатом должен быть выход на одно из соотношений с последующим выводом о характере монотонности заданной функции. Формализуем алгоритм: 1) *записать:* $x_1<x_2$ ($\{x_1, x_2\}\in$ X; 2) *записать:* $f(x_1)$, $f(x_2)$; 3) *сравнить* $f(x_1)$ *и* $f(x_2)$, *пользуясь известными свойствами*; 4) *сравнить полученный результат с соотношениями (1) или (2)*; 5) *сделать вывод о монотонности функции.*

Применим алгоритм к заданию: «Докажите, что функция $y=x^4+5x,\ x\geq 0$ возрастает». Цель: доказательство возрастания функции, используя определение монотонности функции.

1. $0\leq x_1< x_2;$
2. $f(x_1)=(x_1)^4+5x_1, f(x_2)=(x_2)^4+5x_2$;
3. $0\leq x_1< x_2, 0\leq 5x_1< 5x_2,$

$0\leq x_1< x_2, 0\leq (x_1)^4< (x_2)^4$, следовательно,

$5x_1+(x_1)^4< 5x_2+(x_2)^4$;

4. то есть $f(x_1)< f(x_2)$ *(соотношение (2))*;
5. функция $y=x^4+5x$ возрастает при $x\geq 0$.

Покажем, как применяется предложенный комплекс действий при работе с теоремой. Рассмотрим теорему о трех перпендикулярах: «*Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной*». Исходя из формулировки теоремы и рисунка, выполним действия, составляющие умение осуществлять построение модели и получим модельно-содержательную компоненту, представленную на рисунке (рис. 1).

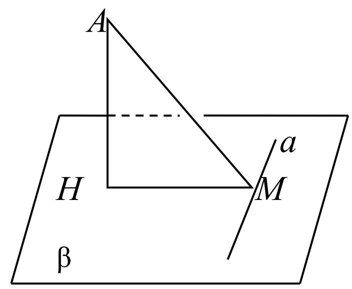	Модельно-содержательный компонент		
	Носитель	Характеристики	Отношения
	β; *a*; *AH*-перпендикуляр; *HM* – проекция; *AM* – наклонная	$a \in \beta$; $HM \in \beta$; $a \perp HM$; $AH \perp \beta$; $M \in a$;	$\left.\begin{cases} AH \perp \beta \\ HM - \text{проекция} \\ AM - \text{наклонная} \\ a \perp HM \\ a \in \beta \\ M \in a \end{cases}\right\} \to a \perp AM$

Рис. 1

При построении модели учащиеся выделяют систему условий (входит в составленное отношение), которую необходимо проверять для применения теоремы в последующей работе. Составленное отношение, по существу, представляет собой запись условий «Дано» и «Доказать». После доказательства теоремы можно предложить учащимся исследовать вопрос: «Как изменится формулировка теоремы, отношение модели, доказательство, если из системы характеристик убрать условие «$M \in a$»?», т. е. обсудить вопрос о необходимости данного условия. Участвуя в поисковой деятельности, учащиеся приходят к обобщенной формулировке теоремы о трех перпендикулярах.

Таким образом, модели определений (понятий, теорем и т. д.) позволяют фиксировать внимание учащихся на необходимых элементах, составляющих их основу, акцентировать роль каждого элемента, устанавливать связи между этими элементами. Все эти действия способствуют как усвоению самого определения (понятия, теоремы и т. д.), так и формированию умения строить модели. В результате систематической работы, у обучающихся будет создаваться база моделей математических объектов, имеющих единую структуру и определяющих общий подход к их использованию и исследованию, т.е. моделированию.

Список литературы

1. Матвеева Е.П. Обучение стратегии построения математической модели – шаг в будущее школьной математике // Современные методы физико-

математических наук. Труды международной конференции (9–14 октября 2006 г., г. Орел). – Т. 3. – Орел: Изд-во ОГУ; Картуш, 2006. – С. 130–132.

2. Матвеева Е.П. Развитие умения осуществлять построение моделей у учащихся при обучении математике в основной школе: Автореф. дис. ... канд. пед. наук. – Екатеринбург, 2007. – 21 с.

3. Мельников Ю.Б. Математическое моделирование: структура, алгебра моделей, обучение построению математических моделей: Монография. Екатеринбург: Уральское издательство, 2004. – 384 с.

4. Мельников Ю.Б. Управление целями в обучении математической деятельности // Педагогический журнал. – 2016. – Т. 6. №6А. – С. 187–199.

5. Мышкис А.Д. О прикладной направленности школьного курса элементов математического анализа // Математика в школе. – М.: Педагогика, 1999. – №6.