Боташева Замира Хусейевна

аспирант

ФГБОУ ВО «Карачаево-Черкесский государственный

университет им. У.Д. Алиева»

г. Карачаевск, Карачаево-Черкесская Республика

DOI 10.21661/r-467747

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К ИЗУЧЕНИЮ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация: *при обучении математике практико-ориентированность играет существенную роль и в школе, и в вузе. Система линейных уравнений относительно конечного числа переменных с действительными коэффициентами часто используется как модель для решения многих практических задач. Автор предлагает комплекс методических подходов для продуктивного обучения решению систем линейных уравнений.*

Ключевые слова: *линейное уравнение относительно нескольких неизвестных, решение системы линейных уравнений, равносильные преобразования линейного уравнения, равносильные преобразования системы, матрица, определитель.*

Многие практические задачи: экономические, статистические и т. п., – сводятся к решению системы линейных уравнений с действительными коэффициентами относительно n переменных. Поэтому эта тема изучается в курсе высшей математики не только студентами естественных, но и гуманитарных специальностей.

Продуктивное усвоение этого материала студентами, особенно гуманитарных направлений, естественно, тесным образом связано с правильно выбранной методикой изучения. С нашей точки зрения, таковой является следующая система подходов или принципов.

Во-первых, соблюдаем принцип практико-ориентированности. С помощью примеров акцентируем внимание студентов на том, что СЛУ (система линейных уравнений) – одна из наиболее используемых математических моделей, имеющая в своем аппарате такие современные математические средства, как матриц и определители. В каждой теме совместно со студентами строим систему примеров.

Во-вторых, соблюдаем связь со школьным курсом математики. Например, начинаем изучение темы с повторения решения линейного уравнения с одной неизвестной

$$ax = b. \tag{1}$$

Это тот случай, когда студенты-гуманитарии, как и студенты-естественники, должны знать точные определения, что такое решение уравнения (1) и что значит решить уравнение (1). Кроме того, необходимо рассматриваем уравнение (1) как параметрическую задачу, т. е. исследуем все три возможных случая: а) $a \neq 0$, б) $a = 0$ и $b = 0$, в) $a = 0$, но $b \neq 0$.

Далее изучаем уравнение вида

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \tag{2}$$

Назовем его линейным (первой степени) уравнением относительно двух переменных $x_1,\ x_2$, числа a_{11}, a_{12} – коэффициентами уравнения, число b_1 – свободным членом уравнения (1). Пары чисел, записанные в нижнем правом углу, назовем индексами. Таким образом, плавно переходим к числам и переменным с двумя индексами.

Этот третий подход назовем «плавные переходы».

Решением уравнения (2) назовем упорядоченную пару чисел (α_1, α_2), при подстановке которых соответственно вместо неизвестных x_1 и x_2 уравнение (2) превращается в числовое тождество. Решить уравнение (2) – значит найти множество всех таких пар чисел (α_1, α_2). Предлагаем студентам решить некоторое конкретное уравнение типа (2). Обращаем внимание, что оно имеет бесконечно много решений. Обозначив x_1 через x, x_2 – через y, предлагаем нарисовать на декартовой плоскости геометрическое место точек, являющееся решением. Заодно выясняется суть упорядоченной пары как декартовых координат точки.

Далее исследуем линейное уравнение относительно n неизвестных

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1. \qquad (3)$$

Числа $a_{11}, \dots, a_{1n}$ – коэффициенты уравнения, а число b_1 – свободный член уравнения. Совместно со студентами формулируем определения решения уравнения (3) и понятия «решить уравнение» (3).

Считаем необходимым рассмотреть понятия равносильных преобразований уравнения. Совместно со студентами определяемся с точной формулировкой равносильности двух уравнений и равносильного преобразования уравнения. Обращаем особое внимание студентов на тот факт, что если к обеим частям уравнения (1), (2) или (3) прибавить одно и то же число или умножить обе части уравнения на одно и то же ненулевое число, то получится равносильное уравнение. Задаем доказательство этого утверждения в качестве самостоятельной домашней работы студентов.

В дальнейшем переходим к решению систем уравнений. Начнем с решения системы двух линейных уравнений относительно двух неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}. \qquad (4)$$

и решение системы трех линейных уравнений относительно трех неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (5)$$

Приводим определения решения систем (4) -(5) и выясняем, что значит решить систему (4) или систему (5).

В одной нашей работе показано, как решая (4) и (5), можно получить метод Крамера и понятие определителей второго и третьего порядков [1, с. 55–60]. Таким образом, наш четвертый подход – выход через метод Крамера на понятие определителей второго и третьего порядков. При этом четко соблюдается принцип плавных переходов от одного понятия к другому..

Введение понятия матрицы через рассмотрение СЛУ -наш пятый подход, пятый принцип. Квадратная таблица чисел

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{n1}a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

состоящая из коэффициентов при неизвестных системы (7)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \tag{7}$$

называется матрицей системы. Она имеет порядок n. В ней число строк (горизонтальные строки) совпадает с числом столбцов (вертикальные строки). Если число строк не совпадает с числом столбцов, то матрица называется неквадратной. Числа $a_{11},\ a_{12}, \dots,\ a_{nn}$ – элементы матрицы. Столбец $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots. \\ b_n \end{pmatrix}$ – столбец свободных членов системы (7).

Решить систему (7) – означает найти все такие упорядоченные строки действительных чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, которые при подстановке вместо соответствующих переменных превращают каждое уравнение системы (7) в верное числовое равенство.

Шестой принцип – работа со студентами в режиме диалога, использование принципа проблемного изложения.

Акцентирование внимания студентов на проблеме равносильных преобразований системы (7) – это седьмой методический подход.

Если поменять местами два уравнения системы, очевидно, множество решений системы не изменится. Назовем это преобразование элементарным преобразованием второго рода. Если какое-нибудь уравнение системы (7) умножить на ненулевое число, то, легко видеть, решение системы останется прежним. Назовем это преобразование элементарным преобразованием системы третьего рода. Также легко доказать непосредственными выкладками, что если два уравнения системы сложить и результат записать вместо одного из уравнений системы, то получится равносильная система [2].

Заметим, что при последовательном проведении описанных преобразований, их композиции, получаем равносильную систему. Элементарным преобразованием первого рода назовем композицию элементарного преобразования третьего рода и последнего преобразования. Она сохраняет равносильность системы. Таким образом, если какое-нибудь уравнение системы (7) умножить на ненулевое число и сложить с другим уравнением и записать вместо последнего, то получим равносильную систему.

Таким образом, подготавливаем хороший задел для объяснения метода Гаусса решения систем линейных уравнений и доказательства теоремы Кронекера-Капелли. На наш взгляд, метод Гаусса является самым эффективным методом решения не только систем линейных уравнений, но и вычисления определителей и обратных матриц.

Данная методика представляет практико-ориентированный подход к изучению теории определителей и матриц, так как снимает вопрос, для чего служат матрицы, зачем нужно считать определители. Ее можно использовать также при углубленном изучении математики в школе.

Список литературы

1. Гербеков Х.А. Метод Крамера как средство продуктивного изучения теории определителей [Текст] / Х.А. Гербеков, З.Х. Боташева // Н.И. Лобачевский и математическое образование в России: Материалы Международного форума по математическому образованию (18–22 октября 2017 г.; XXXVI международный научный семинар преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов на тему «Н.И. Лобачевский и математическое образование в России», VII Международная научно-практическая конференция «Математическое образование в школе и вузе: теория и практика (MATHEDU-2017)» / Отв. ред. Л.Р. Шакирова. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2017. – Т. 2. – С. 55–60.

2. Кострикин А.И. Введение в алгебру [Текст] / А.И. Кострикин. Введение в алгебру. Ч. 1. Основы алгебры: Учеб. для вузов. – 2-е изд., исправл. – М.: Физматлит, 2004.