Байсарова Гулбану Гасанкулиевна

магистр техн. наук, старший преподаватель

Каспийский государственный университет

технологий и инжиниринга им. Ш. Есенова

г. Актау, Республика Казахстан

ОБОБЩЕННЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПЛОСКОГО СЕЧЕНИЯ

Аннотация: *в статье изучаются обобщенные геометрические характеристики плоского сечения с учетом переменного параметра упругости при неравномерном распределении температуры. Даны формулы для обобщенных моментов инерции и координат приведенного центра тяжести. Проведены численные расчеты прямоугольного сечения в системе Mathcad. Численный расчет был проведен для следующих значений постоянных. В результате расчета получили значения приведенных геометрических характеристик плоского сечения. При расчете считали, что модуль упругости материала в результате нагрева уменьшается на 5%. Проведены расчеты для двух случаев: когда модуль упругости меняется (уменьшается) на 5% и когда модуль упругости меняется (уменьшается) на 10%, в одних и тех же условиях. Такие изменения для обычных материалов, например, для конструкционных сталей (сталь 40, сталь 45 и т. д.) обычно это изменение составляет до 5% при нагреве до 2500С. Но для магниевых сплавов, для алюминиевых сплавов и т. д., для других материалов эти изменения составляет 11% – 30%. И расчеты показывают, что до 5% в принципе можно использовать обычные геометрические характеристики, но когда модуль упругости уменьшается на 10% и выше, то необходимо использовать обобщенные геометрические характеристики и необходимо рассчитать напряженно-деформированное состояние с помощью этих характеристик.*

Ключевые слова: *плоское сечение, инерция, геометрические характеристики, конструкционные материалы.*

Рассмотрим обобщенные моменты инерции плоского сечения относительно осей x и y:

$$I_x^* = \int_A y^2 F(x,y)dA, I_y^* = \int_A x^2 F(x,y)dA, I_{xy}^* = \int_A xyF(x,y)dA \tag{1}$$

где: I_x^*, I_y^* – обобщенные моменты инерции относительно осей x, y соответственно, I_{xy}^* – обобщенный центробежный момент.

Если функция F положительно определенная, то обобщенные осевые моменты инерции всегда положительны, а обобщенный центробежный момент инерции может быть положительным или отрицательным.

При параллельном переносе координатных осей меняются величины обобщенных моментов инерции. Будем считать, что обобщенные моменты инерции относительно осей x и y известны. Обобщенные моменты инерции относительно осей x_1 и y_1 вычисляются формулами [1]:

$$\begin{aligned} I_{x1}^* &= I_x^* - 2bS_x^* + b^2A^* \\ I_{y1}^* &= I_y^* - 2aS_y^* + a^2A^* \\ I_{x1y1}^* &= I_{xy}^* - aS_x^* - bS_y^* + abA^* \end{aligned} \tag{2}$$

Если оси x и y проходят через центр приведенного центра тяжести, то

$$S_x^* = 0, S_y^* = 0,$$

формулы (2) упрощаются и принимают вид:

$$\begin{aligned} I_{x1}^* &= I_x^* + b^2A^* \\ I_{y1}^* &= I_y^* + a^2A^* \\ I_{x1y1}^* &= I_{xy}^* + abA^* \end{aligned} \tag{3}$$

Приведенные выше формулы показывают, что обобщенные геометрические характеристики плоского сечения при переходе на параллельные оси имеют те же свойства, что и геометрические характеристики.

Функция $F(x,y)$ при термомеханическом нагружении упругого материала (например, конструкционная сталь) представляет собой модуль упругости, который зависит от температуры, а для слоев композиционного материала представляет собой модуль упругости в обычных условиях. Для конструкционных материалов:

$$F(x,y) \equiv E(T) \equiv E(x,y) \tag{4}$$

С учетом выражения (4), из формул (1) получим соотношения, приведенные в [6]. Когда модуль упругости постоянная величина получим обычные геометрические характеристики плоского сечения в относительных величинах.

В качестве примера рассмотрим расчет обобщенных характеристик прямоугольного сечения, в котором температура меняется только вдоль оси симметрии y. Зависимость модуля упругости от температуры примем в виде:

$$E(T) = E_0 - \beta_k(-T_S^k + T^k), \tag{5}$$

где β_k, T_S, k – постоянные величины, T_S-начальная температура, T – текущая температура.

Очевидно, что при $k = 1;2$ получаем формулы в безразмерной форме.

Примем, что текущая температура меняется по закону:

$$T = T_0 + (T_1 - T_0)(y/h)^n \tag{6}$$

Здесь T_0 и T_1 температуры в поперечном сечении при $y = 0$ и $y = h$ соответственно.

Используя формулы имеем:

$$y_C = [\int_0^h y[1 - \beta_k / E_0(-T_S^k + T^k)]dy] / \int_0^h dy[1 - \beta_k / E_0(-T_S^k + T^k)] \tag{7}$$

Очевидно, что $x_C = 0$.

Обобщенный момент инерции относительно оси x согласно формулам вычисляется как:

$$I_x^* = E_0 d\int_0^h y^2[1 - \beta_k / E_0(-T_S^k + T^k)]dy \tag{8}$$

Обобщенный момент инерции относительно оси x_c проходящей через приведенный центр тяжести параллельно оси x определяем по формуле:

$$I_{x_c}^* = I_x^* - y_C^2 A^* \tag{9}$$

где: $A^* = E_0 d\int_0^h dy[1 - \beta_k / E_0(-T_S^k + T^k)]$.

Для практических расчетов весьма важно выбор значений коэффициентов: β_k в формуле (5) или коэффициентов $\beta_1;\beta_2$ в формулах. Легко показать, что коэффициент β_k можно вычислить по формуле:

$$\beta_k = \frac{E_0 - E_F}{T_F^k - T_S^k},$$

где: T_F – конечное значение температуры нагрева материала, E_0 – модуль упругости первого рода при начальной (обычной) температуре, E_F - модуль упругости первого рода при нагреве материала до конечной температуры.

На самом деле, если взять зависимость $E = aT^k + b$, где a,b-постоянные, то используя условия: при $T = T_S, E = E_0; T = T_F, E = E_F$, то получим:

$$E = E_0 - \frac{E_0 - E_F}{T_F^k - T_S^k}(T^k - T_S^k) \tag{10}$$

Или в безразмерной форме:

$$\overline{E} = 1 - \frac{1 - E_F / E_0}{(T_F / T_S)^k - 1}[(T / T_S)^k - 1] \tag{11}$$

где $\overline{E} = E / E_0$. Следовательно, в безразмерном виде коэффициент β_k вычисляется по формуле:

$$\beta_k^* = \frac{1 - E_F / E_0}{(T_F / T_S)^k - 1} \tag{12}$$

Из формулы (12) видно, что значение коэффициента β_k зависит от значений модуля упругости материала в начале и конце нагрева, от начальной (обычной) температуры и конечной температуры нагрева и от показателя степени k. Модуль упругости первого рода для большинства стали и сплавов в интервале температур от 20^0С до 200^0С уменьшается в пределах 3–8% фактически по линейному закону [2; 5]. В среднем уменьшение модуля упругости составляет 5%.

Из приведенных выше формул видно, что для определения обобщенных характеристик плоского сечения необходимо вычислить интеграл дифференциального бинома, что достаточно объемно. Поэтому, указанные интегралы целесообразно вычислить численно. Для этого введем безразмерные величины:

$$\bar{y} = y / h, \bar{T} = T / T_S, \bar{A}^* = A^* /(E_0 dh), \bar{I}_x^* = I_x^* /(E_0 dh^3);$$

$$\beta_k^* = (1 - E_F / E_0) /[(T_F / T_S)^k - 1], k = 1;2$$

Тогда формулы (10), (11) и (12) примут вид:

$$\begin{aligned}
&\bar{y}_c = [\int_0^1 \bar{y} d\bar{y}[1 - \beta_k^*(\bar{T}^k - 1)]] / \int_0^1 [1 - \beta_k^*(\bar{T}^k - 1)] d\bar{y} \\
&\bar{I}_x^* = \int_0^1 \bar{y}^2 [1 - \beta_k^*(\bar{T}^k - 1)] d\bar{y} \\
&\bar{I}_{xc}^* = \bar{I}_x^* - \bar{y}_c^2 \bar{A}^* \\
&\bar{A}^* = \int_0^1 [1 - \beta_k^*(\bar{T}^k - 1)] d\bar{y}
\end{aligned} \quad (13)$$

Численный расчет был проведен для следующих значений постоянных: $T_S = 26^0 C, T_0 = 108^0 C, T_1 = 34^0 C, k = 1, n = 1$. В результате расчета получили значения приведенных геометрических характеристик плоского сечения: $\bar{y}_C = 0.504, \bar{I}_x^* = 0.328, \bar{I}_{Xc}^* = 0.081, \bar{A}^* = 0.973$. При расчете считали, что модуль упругости материала в результате нагрева уменьшается на 5%. Результаты расчета приведены в таблице 1. В таблице 2 приведены данные расчета при уменьшении модуля упругости на 10% при тех же режимах нагрева, что и в таблице 1. Численные расчеты проводились в системе Mathcad.

В качестве тестовой задачи был проведен расчет для равномерного распределения температуры по сечению. В результате расчета получили точное значение координаты приведенного центра тяжести $\bar{y}_C = 0.5$, который совпадает с геометрическим центром тяжести.

Таблица 1

	k	$T_0\,^0$C	$T_1\,^0$C	$T_S\,^0$C	n	$\bar{y}_c$	$\bar{I}_x^*$	$\bar{I}_{xc}^*$	$\bar{A}^*$
1	1	108	34	26	1	0,504	0,328	0,081	0,973
2					2	0,504	0,326	0,081	0,965
3					1/2	0,503	0,33	0,082	0,98
4					1/3	0,502	0,33	0,082	0,984
1	1	168	83	26	1	0,507	0,31	0,076	0,913
2					2	0,507	0,307	0,075	0,9
3					1/2	0,505	0,313	0,077	0,925
4					1/3	0,504	0,314	0,077	0,931

Таблица 2

№	k	$T_0\,^0$C	$T_1\,^0$C	$T_S\,^0$C	n	$\bar{y}_c$	$\bar{I}_x^*$	$\bar{I}_{xc}^*$	$\bar{A}^*$
1 2 3 4	1	108	34	26	1 2 1/2 1/3	0,676 0,772 0,604 0,574	0,223 0,177 0,256 0,269	0,023 0,008 0,04 0,049	0,438 0,283 0,592 0,669
1 2 3 4	1	168	83	26	1 2 1/2 1/3	0,515 0,516 0,512 0,509	0,288 0,28 0,293 0,295	0,069 0,067 0,07 0,071	0,825 0,801 0,85 0,863

Из результатов расчета приведенных в таблице 1 и 2 видно, что при незначительном (до 5%) изменении модуля упругости материала приведенный центр тяжести фактически совпадает с геометрическим центром и вид функции изменения температуры в поперечном сечении незначительно влияет на положение приведенного центра тяжести. При изменении модуля упругости на 10% при тех же температурных режимах координата приведенного центра тяжести не совпадает с геометрическим центром. Координата приведенного центра тяжести существенно зависит от температур нагрева верхней и нижней грани поперечного сечения и от закона изменения температуры в поперечном сечении.

В сплавах с мартенситными превращениями вблизи температур фазовых превращений наблюдается резкое изменение модуля упругости [3]. Относительное уменьшение модуля упругости во время фазового перехода составляет до 25% от модуля упругости аустенита [4]. Очевидно, что проведенные выше расчеты еще более существенны для сплавов с памятью формы.

Список литературы

1. Киквидзе О.Г. Геометрически нелинейная задача изгиба термоупругих стержней: Сб. трудов межд. симпозиума «Проблемы тонкостенных пространственных конструкции» / О.Г. Киквидзе, Л.Г. Киквидзе. – Тбилиси: Груинский технический университет. – 4–5.07.01 – С.28–31.

2. Масленков С.Б., Масленкова Е.А. Стали и сплавы для высоких температур: Справочник в двух книгах / С.Б. Масленков, Е.А. Масленкова. – М.: Металлургия, 1991. – Кн. 1 – 383 с.; Кн. 2. – 832 с.

3. Ооцука К. Сплавы с эффектом памяти формы / К. Ооцука [и др.]. – М.: Металлургия, 1990. – 224 с.

4. Определение теплофизических и механических свойств материалов с эффектом памяти формы / Отчет о НИР Харьковский гос. университет. – Харьков, 1989. – №0185.0080132.

5. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / Н.И. Безухов [и др.]; под ред. И.И. Гольденблата. – М.: Машиностроение. – 1965. – 568 с.

6. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. – М.: Машиностроение, 1978. – 312 с. – (Библиотека расчетчика).