Автор:

Головина Мария Юрьевна

ученица 7 класса

Научный руководитель:

Ковалева Ольга Александровна

учитель математики

КГУ Комплекс школа-Д/С №33

г. Караганда, Республика Казахстан

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЯДОВ ФАРЕЯ

Аннотация*: в данной статье рассматривается способ решения вычислительных задач на нахождение суммы дробей с использованием рядов Фарея. Исследованы свойства рядов Фарея. Обобщен практический опыт организации занятия по решению задач с использованием рядов Фарея.*

Ключевые слова*: несократимые дроби, последовательность, ряд Фарея, итерация, медианта.*

При решении одной из задач, предлагаемых на ЕНТ, я столкнулась с заданием: $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 10}$.

Было понятно, что традиционное приведение дробей к общему знаменателю значительно усложняет задачу. Необходимо было найти такое решение, которое бы не требовало приведения всех дробей к одному НОЗ, было негромоздким, доступным и понятным семикласснику. Поиск аналогичных заданий в учебнике, сборниках ВОУД и ЕНТ привел тому, что я увидела, что на практике довольно часто встречаются упражнения по упрощению (вычислению) дробей, требующих много времени, если их выполнять, используя обычные, стандартные приемы.

Анализ задач и поиск решения привел к рядам, носящим имя Фарея. Из статьи в Википедии узнала, что Джон Фарей был геологом по образованию, его единственным вкладом в математику были дроби, названные его именем. В

1816 году была опубликована статья Фарея «Об интересном свойстве обыкновенных дробей», в ней он описал последовательность F_n и «интересное свойство» итеративного построения последовательностей.

Таким образом, цель моего проекта: выяснить, что представляют собой ряды Фарея, какими необычными свойствами они обладают, использовать эти свойства в решении задач на сумму дробей, собрать коллекцию таких задач для подготовки к ЕНТ и ВОУД. Проведенный опрос одноклассников и учащихся 11 класса показал актуальность выбранной темы. 98% опрошенных затруднялись решить предложенную задачу на сумму дробей, все респонденты предлагали традиционное приведение дробей к общему знаменателю. Опрос также показал, что учащиеся не знакомы с именем Фарея, и не знают каков его вклад в развитие математики.

Если $\frac{a}{в}$ *и* $\frac{a_1}{в_1}$ две рядом стоящие дроби, то $a_1в - ав_1=1$, причем $\frac{a}{в} < \frac{a_1}{в_1}$. А если $\frac{a}{в}$; $\frac{a_1}{в_1}$; $\frac{a_2}{в_2}$ – три соседние дроби, то $\frac{a_1}{в_1} = \frac{a}{в} + \frac{a_2}{в_2}$.Таким образом, пусть n - натуральное число. Ряд расположенных в порядке возрастания несократимых правильных дробей с натуральными знаменателями, не превосходящими n, называется в теории чисел рядом Фарея, отвечающим числу n. Например, при n=2 ряд Фарея состоит из одной дроби $\frac{1}{2}$; при n = 3 ряд Фарея есть $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$, Ряд Фарея, отвечающий данному натуральному числу n, может быть построен следующим образом: пишем дроби $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}$,, если n=2, то между этими дробями помещаем еще дробь $\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$, затем в полученном ряде дробей, между каждыми двумя соседними дробями $\frac{а1}{в1}$ и $\frac{c1}{d1}$ помещаем дробь $\frac{а1+c1}{в1+d1}$ и этот процесс продолжаем до тех пор, пока это возможно. Например, если надо построить ряд Фарея, отвечающий n=3, то в ряде полученном ранее $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}\ \frac{1}{1}$, помещаем между $\frac{0}{1}$, и $\frac{1}{2}$ дробь $\frac{0+1}{1+2} = \frac{1}{3}$, а между $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{1}$ помещаем дробь $\frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3}$, получаем ряд $\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$, процесс закончен (т. к. n = 3), исключая из полученного ряда крайние дроби (они служили нам для построения ряда) получаем искомый ряд дробей

Фарея, отвечающий условию n = 3. Попробуем построить по этому правилу ряды дробей, F_n для n=1,2,…, 8:

n=1 $F_1 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\}$

n=2 $F_2 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\}$

n=3 $F_3 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\}$

n=4 $F_4 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\}$

n=5 $F_5 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\}$

n=6 $F_6 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}\}$

n=7 $F_7 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}\}$

n=8 $F_8 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{1}{1}\}$ Вернемся к решению примеров:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$

Как видно из решения, оно очень простое, не требует громоздких вычислений.

1. Упростить выражение: (сборник ЕНТ 2016, в 12 №18).

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+5)}+\frac{1}{(x+5)(x+6)}$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{(x+1)}+\frac{1}{(x+1)}-\frac{1}{(x+2)}+...+\frac{1}{(x+5)}+\frac{1}{(x+5)}\frac{1}{(x+6)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{(x+6)}=\frac{6}{x(x+6)}$$

2.Вычислить: (сборник ЕНТ 2013, вариант 5 №15).

$$\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{6\cdot7}+\frac{1}{7\cdot8}+\frac{1}{8\cdot9}+\frac{1}{9\cdot10}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-+...\frac{1}{9}-\frac{1}{10}=\frac{1}{2}-\frac{1}{10}=\frac{4}{10}$$

Как видим, решение заданий тривиальное. Знание формулы, по которой строится ряд Фарея, в разы упрощает вычисления. Эта формула должна занять достойное место среди формул, необходимых для успешной сдачи ЕНТ и ВОУД и метод, рассматриваемый в этой работе должен быть в арсенале учащихся. Проведенное занятие по этой теме дало положительные результаты. Среди учащихся, которым были предложены задания с использованием ряда Фарея, не было ни одного, кто бы с ним не справился. Это говорит о том, что цель работы достигнута.

Список литературы

1. Рустюмова И.П. Пособие для подготовки ЕНТ по математике / И.П. Рустюмова, С.Т. Рустюмова. – 4-е изд. – Алматы, 2010.

2. Ряды Фарея [Электронный ресурс]. – Режим доступа: ru.wikipedia.org/wiki/Ряд_Фарея

3. Апеев Д.В. Использование рядов Фарея в решении задач [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://assorti-1.narod.ru/conf2009/conf_apeev.doc (дата обращения: 29.11.2017).