Якубовский Евгений Георгиевич

инженер

ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский горный университет»

г. Санкт-Петербург

DOI 10.21661/r-563157

НОВАЯ ЗАПИСЬ ТЕНЗОРА РИЧЧИ

***Аннотация**: в статье оцениваются собственные значения тензора Риччи, которые пропорциональны с диагональными вычисленными компонентами. В ходе подсчетов, автором отмечен результат, как нулевая кривизна для решения Шварцшильда.*

***Ключевые слова**: тензор Риччи, метрический тензор, новое значение тензора Ричи.*

В случае не учета очередности дифференцирования тензор Риччи равен нулю. В случае учета очередности дифференцирования он конечен. Это проявилось при использовании диагонального метрического тензора. Но качественные соотношения позволяют вычислить собственные значения тензора Риччи

В случае диагональных элементов метрического тензора имеем равенство

$$\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right)$$

В случае диагональных элементов метрического тензора имеем соотношение между индексами $i = k = l$ и значение метрического тензора

$$\Gamma_{ii}^i = g^{ii}\Gamma_{i,ii} = \frac{1}{2}\frac{\partial ln g_{ii}}{\partial x^i}; \Gamma_{ik}^i = g^{ii}\Gamma_{i,ki} = \frac{1}{2}\frac{\partial ln g_{ii}}{\partial x^k}; \Gamma_{kk}^i = g^{ii}\Gamma_{i,kk} = -\frac{g^{ii}}{2}\frac{\partial g_{kk}}{\partial x^i}$$

Для вычисления собственных значений тензора Риччи нельзя использовать прямую подстановку его значений, получим не определяемую величину, а нужно использовать общий вид этого тензора. Но можно оценить значение собственные значения тензора Риччи, который пропорционален с диагональными вычисленными компонентами. Построим симметричный тензор

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^l}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l\Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m\Gamma_{km}^l$$

Для определения независимых значений собственного значения этого тензора, надо использовать его общий вид, прямая подстановка значений его символа Кристоффеля приводит к неопределенному значению, равному нулю, без учета порядка дифференцирования, а с учетом его получается неопределенное выражение. Вычислим собственные значения тензора Риччи в случае радиальной компоненты метрического тензора $\sqrt{(\lambda_r)^2+(\lambda_0)^2}$, получим уравнение

$$(\lambda\text{-}R_{00})(\lambda\text{-}R_{rr}) = R_{0r}R_{r0};$$

$$\lambda_r = \sqrt{(\lambda_r)^2+(\lambda_0)^2}cos\theta = R_{r0}+R_{rr} =$$

$$= \frac{\partial\Gamma^0_{r0}}{\partial x^0}\text{-}\frac{\partial\Gamma^r_{rr}}{\partial x^0}+\Gamma^l_{r0}\Gamma^m_{lm}\text{-}\Gamma^m_{rl}\Gamma^l_{0m}+\frac{\partial\Gamma^l_{rr}}{\partial x^l}\text{-}\frac{\partial\Gamma^l_{rl}}{\partial x^r}+\Gamma^l_{rr}\Gamma^m_{lm}\text{-}\Gamma^m_{rl}\Gamma^l_{rm}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{\partial lng_{00}}{2\partial x^r}\right)\text{-}\frac{\partial}{2\partial x^0}\left(\frac{\partial lng_{rr}}{2\partial x^r}\right)$$

$$+ g^{00}\frac{\partial lng_{rr}}{2\partial x^0}\frac{\partial\ln(g_{00}g_{rr})}{\partial x^0}\text{-}\frac{\partial\ln(g_{rr}g_{00})}{4\partial x^r}\frac{\partial\ln(g_{00}g_{rr})}{\partial x^0}$$

$$+ \frac{\partial}{2\partial x^0}\left(\text{-}g^{00}\frac{\partial g_{rr}}{\partial x^0}\right)\text{-}\frac{\partial}{2\partial x^r}\left(\frac{\partial lng_{00}}{\partial x^r}\right)$$

$$+ \frac{\partial g_{rr}}{4\partial x^r}\frac{\partial\ln(g_{00}g_{rr})}{\partial x^r}\text{-}\left(\frac{\partial\ln(g_{00}g_{rr})}{2\partial x^r}\right)^2$$

$$\lambda_0 = \sqrt{(\lambda_r)^2+(\lambda_0)^2}sin\theta = R_{0r}+R_{00}$$

$$\lambda_0 = \frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{\partial lng_{00}}{2\partial x^r}\right)\text{-}\frac{\partial}{2\partial x^0}\left(\frac{\partial lng_{rr}}{2\partial x^r}\right)$$

$$+ g^{00}\frac{\partial lng_{rr}}{2\partial x^0}\frac{\partial\ln(g_{00}g_{rr})}{\partial x^0}\text{-}\frac{\partial\ln(g_{rr}g_{00})}{4\partial x^r}\frac{\partial\ln(g_{00}g_{rr})}{\partial x^0}$$

$$+ \frac{\partial}{2\partial x^r}\left(\text{-}g^{rr}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^r}\right)\text{-}\frac{\partial}{2\partial x^0}\left(\frac{\partial lng_{rr}}{\partial x^0}\right)$$

$$+ \frac{\partial g_{00}}{4\partial x^0}\frac{\partial\ln(g_{00}g_{rr})}{\partial x^0}\text{-}\left(\frac{\partial\ln(g_{00}g_{rr})}{2\partial x^0}\right)^2$$

Собственные значения тензора Риччи равны

$$\lambda_\alpha = \frac{(R_{00}+R_{rr})\pm\sqrt{(R_{00}+R_{rr})^2\text{-}4(R_{00}R_{rr}\text{-}R_{0r}R_{r0})}}{2};$$

$$\lambda_{min} = \frac{R_{00}R_{rr}\text{-}R_{r0}R_{0r}}{R_{00}+R_{rr}}; \lambda_{max} = R_{00}+R_{rr}$$

$$\lambda_{max} = \frac{\partial \Gamma^l_{00}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{0l}}{\partial x^0} + \Gamma^l_{00}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{0l}\Gamma^l_{0m} + \frac{\partial \Gamma^l_{rr}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{rl}}{\partial x^r} + \Gamma^l_{rr}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{rl}\Gamma^l_{rm} =$$

$$= \frac{\partial \Gamma^r_{00}}{\partial x^r} - \frac{\partial \Gamma^r_{0r}}{\partial x^0} + \Gamma^l_{00}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{0l}\Gamma^l_{0m} + \frac{\partial \Gamma^0_{rr}}{\partial x^0} - \frac{\partial \Gamma^0_{r0}}{\partial x^r} + \Gamma^l_{rr}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{rl}\Gamma^l_{rm} =$$

$$= \frac{\partial}{2\partial x^r}\left(-g^{rr}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^r}\right) - \frac{\partial}{2\partial x^0}\left(\frac{\partial ln g_{rr}}{\partial x^0}\right) + \frac{\partial g_{rr}}{4\partial x^r}\frac{\partial \ln\left(g_{00}g_{rr}\right)}{\partial x^r} - \left(\frac{\partial \ln\left(g_{00}g_{rr}\right)}{2\partial x^0}\right)^2$$

$$+ \frac{\partial}{2\partial x^0}\left(-g^{00}\frac{\partial g_{rr}}{\partial x^0}\right) - \frac{\partial}{2\partial x^r}\left(\frac{\partial ln g_{00}}{\partial x^r}\right) +$$

$$+ \frac{\partial g_{00}}{2\partial x^0}\frac{\partial \ln\left(g_{00}g_{rr}\right)}{2\partial x^0} - \left(\frac{\partial \ln\left(g_{00}g_{rr}\right)}{2\partial x^r}\right)^2$$

Получилось почти волновое уравнение с нелинейным членом, причем линейным член близок к полученному из качественных соображений. В общем случае можно приближенно вычислить минимальное и наибольшее собственные значения

$$\lambda_{max}(z-z_0) = \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{3} R_{kk}\right)^2 + \left(\frac{|R_{kn}|}{\sum_{n=0}^{3}(-1)^n A_{0n}}\right)^2} sh(\chi) =$$

$$= sh(\chi)\sum_{k=0}^{3} R_{kk}\, ; \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}} = tg(\theta)$$

$$\lambda_{min}\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{3} R_{kk}\right)^2 + \left(\frac{|R_{kn}|}{\sum_{n=0}^{3}(-1)^n A_{0n}}\right)^2} sh(\chi) sin\theta$$

$$= \frac{|R_{kn}|}{\sum_{n=0}^{3}(-1)^n A_{0n}} sh(\chi); \lambda_{min} \ll \lambda_{max}$$

$$\lambda_{cos}(x-x_0) = \sqrt{(\sum_{k=0}^{3} R_{kk})^2 + (\frac{|R_{kn}|}{\sum_{n=0}^{3}(-1)^n A_{0n}})^2} sh(\chi) sin\theta cos\varphi$$

$$\lambda_{sin}(y-y_0) = \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{3} R_{kk}\right)^2 + \left(\frac{|R_{kn}|}{\sum_{n=0}^{3}(-1)^n A_{0n}}\right)^2} sh(\chi) sin\theta sin\varphi$$

$$\lambda_t c(t\text{-}t_0) = \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{3} R_{kk}\right)^2 + \left(\frac{|R_{kn}|}{\sum_{n=0}^{3}(\text{-}1)^n A_{0n}}\right)^2} ch(\chi)$$

$$(\lambda_{max})^2(z\text{-}z_0)^2 + (\lambda_{cos})^2(x\text{-}x_0)^2 + (\lambda_{sin})^2(y\text{-}y_0)^2 =$$

$$= (\lambda_{max})^2(z\text{-}z_0)^2 + (\lambda_{min})^2[(x\text{-}x_0)^2 + (y\text{-}y_0)^2] =$$

$$= \left[\left(\sum_{k=0}^{3} R_{kk}\right)^2 + \left(\frac{|R_{kn}|}{\sum_{n=0}^{3}(\text{-}1)^n A_{0n}}\right)^2\right] sh^2(\chi)$$

Где величина A_{0n} алгебраическое дополнение к элементу a_{0n}. Тогда имеем значение радиуса

$$(s\text{-}s_0)^2 = \left(\sum_{k=0}^{3} R_{kk}\right)^2 + \left(\frac{|R_{kn}|}{\sum_{n=0}^{3}(\text{-}1)^n A_{0n}}\right)^2 =$$

$$(\lambda_t)^2 c^2 (t\text{-}t_0)^2 \text{-} (\lambda_{max})^2(z\text{-}z_0)^2 \text{-} (\lambda_{cos})^2(x\text{-}x_0)^2 \text{-} (\lambda_{sin})^2(y\text{-}y_0)^2 =$$

$$= (\lambda_t)^2 c^2 (t\text{-}t_0)^2 \text{-} (\lambda_{max})^2(z\text{-}z_0)^2 \text{-} (\lambda_{min})^2[(x\text{-}x_0)^2 + (y\text{-}y_0)^2]$$

$$cos\theta = \frac{\sum_{k=0}^{3} R_{kk}}{\sqrt{(\sum_{k=0}^{3} R_{kk})^2 + \left(\frac{|R_{kn}|}{\sum_{n=0}^{3}(\text{-}1)^n A_{0n}}\right)^2}}$$

$$sin\,\theta = \frac{\frac{|R_{kn}|}{\sum_{n=0}^{3}(\text{-}1)^n A_{0n}}}{\sqrt{(\sum_{k=0}^{3} R_{kk})^2 + \left(\frac{|R_{kn}|}{\sum_{n=0}^{3}(\text{-}1)^n A_{0n}}\right)^2}}$$

Метрический тензор определен с точностью до множителя через углы обобщенной сферической системы координат. Множитель вычислен из решения уравнения ОТО по определению тензора Риччи. Метрический тензор определен по значениям углов с точностью до переменного множителя $\sqrt{(\sum_{k=0}^{3} R_{kk})^2 + \left(\frac{|R_{kn}|}{\sum_{n=0}^{3}(\text{-}1)^n A_{0n}}\right)^2}$. Зная тензор энергии импульса, можно определить собственные значения тензора Риччи и значит определить этот множитель.

Но качественные соображения позволяют вычислить влияние метрического тензора на величину собственных значений тензора Риччи. При действительном симметричном тензоре Риччи его собственные значения действительные и собственные векторы образуют ортонормированный базис.

Тут я стал копать дальше и подставил диагональные метрические тензоры в определение кривизны и получил нулевую кривизну при подстановке диагональных элементов g_{ik}

$$R_{iklm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^m \partial x^i} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^m \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l}\right) + g_{np}\left(\Gamma^n_{kl}\Gamma^p_{im} - \Gamma^n_{km}\Gamma^p_{il}\right)$$

Подставим в это равенство диагональные элементы метрического тензора и учтем, что при этом индексы у метрического тензора совпадают и у символа Кристоффеля в случае диагональных метрических тензоров все индексы совпадают, получим некое подобие антисимметричного собственного значения тензора кривизны.

$$R_{iklm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \left(\frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m}\right)\right) + g_{np}\left(\Gamma^n_{ki}\Gamma^p_{lm} - \Gamma^n_{km}\Gamma^p_{il}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{ii}}{\partial x^k \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ii}}{\partial x^k \partial x^k} - \left(\frac{\partial^2 g_{kk}}{\partial x^i \partial x^i} - \frac{\partial^2 g_{kk}}{\partial x^i \partial x^i}\right)\right) + g_{np}\left(\Gamma^n_{nn}\Gamma^p_{pp} - \Gamma^n_{nn}\Gamma^p_{pp}\right)$$

$$R_{ikki} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 lng_{ii}}{\partial x^k \partial y^k} - \frac{\partial^2 lng_{ii}}{\partial y^k \partial x^k} - \left(\frac{\partial^2 lng_{kk}}{\partial x^i \partial y^i} - \frac{\partial^2 lng_{kk}}{\partial y^i \partial x^i}\right)\right) \neq 0$$

$$R_{ikki} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{ii}}{\partial (x^k)^2} - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(1 - g^{ii}\right)\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} - \left(\frac{\partial^2 g_{kk}}{\partial (x^i)^2} - \frac{\partial}{\partial x^i}\left(1 - g^{kk}\right)\frac{\partial g_{kk}}{\partial x^i}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 lng_{ii}}{\partial (x^k)^2} - \frac{\partial^2 lng_{kk}}{\partial (x^i)^2}\right)\frac{1}{2} = \frac{\partial^2 ln\lambda_i}{\partial (x^k)^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 ln\lambda_k}{\partial (x^i)^2}$$

В результате получим нулевую кривизну для решения Шварцшильда, если не учитывать очередность дифференцирования. Если не учитывать очередность дифференцирования, то кривизна пространства равна нулю, если учитывать, очередность дифференцирования, то получим конечное значение тензора кривизны, который по аналогии с тензором Риччи равен антисимметричной величине. Собственные значения не используем, поэтому вклад нелинейных элементов равен нулю.

Вычислим вклад для нелинейного члена

$$\frac{1+\frac{qd[ReA_k+iImA_k]}{4\rho c_F^2 dV}}{1\text{-}\frac{qd[ReA_k+iImA_k]}{4\rho c_F^2 dV}}=\lambda_{k0}\cdot\exp(y_k)$$

$$\frac{d(ReA_k+iImA_k)}{dV}=\frac{4\rho c_F^2}{q}\frac{\lambda_{k0}\cdot\exp(y_k)\text{-}1}{\lambda_{k0}\cdot\exp(y_k)+1};\varepsilon_k\le\varepsilon_0$$

$$\frac{1\text{-}\frac{qd[ImA_0+iReA_0]}{4\rho c_F^2 dV}}{1+\frac{qd[ImA_0+iReA_0]}{4\rho c_F^2 dV}}=\lambda_{00}\cdot\exp(y_0)$$

$$\frac{d(ImA_0+iReA_0)}{dV}=\frac{4\rho c_F^2}{q}\frac{1\text{-}\lambda_{00}\cdot\exp(y_0)}{1+\lambda_{00}\cdot\exp(y_0)]}$$

$$y_k=4\pi\{\varepsilon_0\text{-}(\varepsilon_0\text{-}\varepsilon_k)\left(1+\frac{q^2}{m^2G}\right)\left[\text{-}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x_k\text{-}x_{k0}+r_g}{r_g}\right)^2\right]$$

В случае связанного состояния $\varepsilon_k\le\varepsilon_0;\frac{T_k\text{-}T_0}{\rho c^2}\le 0$. Это неравенство справедливо для любого связанного состояния. За величину T_0 нужно брать $T_0=\frac{\rho c^2}{1\text{-}V^2/c^2}$. При этом величина T_k равняется общей величиной $T_k=\frac{\rho V_k^2}{1\text{-}V^2/c^2}<T_0$. Таким образом образуется связанное состояние.

Максимальное значение величины y_k получается при координате $x_k=x_{k0}\text{-}r_g$ и оно равно $y_{maxk}=4\pi\left[\varepsilon_0+\frac{(\varepsilon_0\text{-}\varepsilon_k}{2}\left(1+\frac{q^2}{m^2G}\right)\right]$. Минимальное значение величины y_k равно $y_{mink}\to\text{-}\infty$. У нелинейного члена получится больший вклад в определяемую величину векторного потенциала $\frac{d(ImA_0+iReA_0)}{dV}=\frac{4\rho c_F^2}{q};\frac{d(ReA_k+iImA_k)}{dV}=\text{-}\frac{4\rho c_F^2}{q};k=1,\ldots,3$

При координате, стремящейся к бесконечности, получаем конечное значение плотности потенциала при нулевом значении разности

$$\left[\frac{d(ImA_0+iReA_0)}{dV}\right]^2\text{-}\left[\frac{d(ReA_r+iImA_r)}{dV}\right]^2=$$

$$=\left[\frac{d(ImA_0+iReA_0)}{dV}\right]^2\text{-}\left[\frac{d(ReA_n+iImA_n)}{dV}\right]^2=\left(\frac{4\rho c_F^2}{q}\right)^2\text{-}(\text{-}\frac{4\rho c_F^2}{q})^2=0$$

Получается конечная энергия тела

$$A_r^2 = A_n^2 \begin{bmatrix} \cos^2(\varphi_1\text{-}\varphi_{10}) + \cos^2(\varphi_2\text{-}\varphi_{20}) \\ +\cos^2(\varphi_3\text{-}\varphi_{30}) \end{bmatrix} = A_n^2$$

и суммарная энергия тел, совпадает с энергией – радиальной, равной энергии с индексом r.