Байсарова Гулбану Гасанкулиевна

магистр техн. наук, старший преподаватель

Каспийский государственный университет

технологий и инжиниринга им. Ш. Есенова

г. Актау, Республика Казахстан

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СТЕРЖНЕЙ

Аннотация*: нелинейная задача деформирования стержня при термомеханическом нагружении. Рассматривается плоская задача, когда стержень деформируется в плоскости под действием механической нагрузки и неравномерного температурного поля. Сформулированы основные дифференциальные уравнения для криволинейных стержней, из которых можно получить дифференциальные уравнения для прямых стержней, если туда поставить Ѳ0=0, р0 стремиться к бесконечности.*

Ключевые слова*: уравнение, основные уравнения, нелинейное деформирование стержней.*

Рассмотрим деформирование стержней с начальной кривизной. Обозначим радиус кривызнитермоупругой линии до и после деформации через ρ_0 и ρа угол наклона касательной термоупругой линии к оси z до и после деформации через θ_0 и θ соответственно, перемещение вдоль оси z – через w, а вдоль оси y – через v. Очевидно, что w=w(l), v=v(l),ρ=ρ(l),θ=θ(l), где l-длина дуги деформированной термоупругой линии (сопутствующая координата), или $w=w(l_0)$, $v=v(l_0)$,$\rho=\rho(l_0)$,$\theta=\theta(l_0)$, где l_0-длина дуги недеформированной термоупругой линии. Оси y, z выберем таким образом, чтобы плоскость yz совпадала с плоскостью изгиба [1].

Деформация элементарного отрезка AB длиной dl_0 определяется как

$$\varepsilon_0=(dl-dl_0)/dl_0 \quad (1)$$

откуда, длина после деформации dl того же элемента

$$dl=dl_0(1+\varepsilon_0) \quad (2)$$

где $dl = \rho d\theta$, $dl_0=\rho_0 d\theta_0$.

Рассматривая геометрию терма упругой линии в деформированном состоянии согласно, можно записать

$$dl_0\sin\theta_0 + dv = dl\sin\theta,\ dl_0\cos\theta_0 + dw = dl\cos\theta \quad (3)$$

которые с учетом соотношения (1) примут вид:

$$dv/dl_0 = (1+\varepsilon_0)\sin\theta - \sin\theta_0,\ dw/dl_0=(1+\varepsilon_0)\cos\theta-\cos\theta_0 \quad (4)$$

Для того чтобы установить распределение деформации в поперечном сечении используем гипотезу плоских сечений и рассмотрим деформацию элементарного отрезка СД на расстоянии y от термоупругой линии.

Деформация СД слоя определяется как

$$\varepsilon_{сд}=[(\rho+y)d\theta-(\rho_0+y)d\theta_0]/[(\rho_0+y)d\theta_0],\ \varepsilon_{сд}=(\rho+y)d\theta/[(1+y/\rho_0)\ \rho_0 d\theta_0] -1 \quad (5)$$

Очевидно, что для стержней $y/\rho_0<1$(не рассматриваем стержни большой кривизны, для которых y и ρ_0 соизмеримы). В таком случае$1/(1+y/\rho_0)=1-y/\rho_0+(y/\rho_0)^2-\ldots$и пренебрегая слагаемыми высшего порядка малости, с учетом последнего выражения формула (1) примет вид

$$\varepsilon_{сд}=\varepsilon_0+\kappa_x y, \quad (6)$$

где введено обозначение $\kappa_x=d\theta(1-\rho/\rho_0)/dl_0$ (7)

$$\text{или}\ \kappa_x=(1+\varepsilon_0)(1/\rho-1/\rho_0)$$

Из последнего выражения следует, что кривизна после деформации

$$1/\rho=1/\rho_0+\kappa_x/(1+\varepsilon_0) \quad (8)$$

Используя соотношения (4.5) и (4.6) получим

$$d\theta/dl_0=(1+\varepsilon_0)/\rho_0+ \quad \kappa_x \quad (9)$$

Таким образом, получили дифференциальное уравнение для угла наклона касательной, которое совместно с уравнениями (2) описывают геометрию деформирования при больших перемещениях с учетом деформации (растяжения – сжатия) терма упругой линии.

Для того чтобы определить неизвестные параметры ε_0и κ_x, имеем уравнения равновесия:

$$\int\sigma dF = N, \int\sigma y dF = M, \quad (10)$$

где N – нормальная сила, M – изгибающий момент в поперечном сечении стержня.

При решении термо упругой задачи полная деформация определяется как сумма упругих ε^e и температурных ε^t деформации ($\varepsilon=\varepsilon^e+\varepsilon^t$). Тогда с учетом закона Гука и выражения (4.4), для напряжения получим

$$\sigma=E(t)(\varepsilon_0+\kappa_x y)-E(t)\varepsilon^t \quad (11)$$

где E(t) – модуль упругости, t – температура.

В ряде случаев при вычислении полной деформации необходимо учитывать также дополнительные деформации ε^0, которые связаны с фазовыми превращениями ($\varepsilon=\varepsilon^e+\varepsilon^t+\varepsilon^0$). Например, для материалов с памятью формы в интервале температур термо упругих мартенситных превращений дополнительными деформациями являются фазовые деформации, которые вычисляются как $\varepsilon^0=B\sigma(t^m-M_s^m)$, где B и m постоянные материала, M_s – температура начала фазового превращения. В таком случае для напряжения имеем $\sigma=\Phi(t)(\varepsilon_0+\kappa_x y)-\Phi(t)\varepsilon^t$, (12)

где $\Phi(t)=1/[1/E(t)+B(t^m-M_s^m)]$. В дальнейшем для общности используем уравнение (12).

Если подставить выражение (11) в условия (12), то после несложных преобразовании получим

$$\varepsilon_0=N/A^*+[\int\varepsilon^t\Phi dA]/A^*, \quad \kappa_x=M/I_x^*+[\int\varepsilon^t y\Phi dA]/I_x^*, \quad (13)$$

где $A^*=\int\Phi dA$ – обобщенная площадь, а $I_x^*=\int y^2\Phi dA$ – обобщенный момент инерции поперечного сечения.

Для того чтобы замкнуть систему уравнений (2), (7) необходимо получить дифференциальные уравнения статики. Рассмотрим равновесие элемента стержн.

На рис. 4.3 q_z,q_y составляющие вектора распределенных внещных сил, а m – интенсивность внешнего изгибающего момента. Уравнения статики имеют вид: dM/dl=Hsinθ-Rcosθ -m,

$$dR/dl= -q_y, dH/dl= -q_z, \quad (14)$$

где T и R горизонтальная и вертикальная составляющие вектора усилия в поперечном сечении стержня. Последняя система уравнений с учетом выражения (1) примет вид

$$dM/dl_0=(1+\varepsilon_0)(H\sin\theta-R\cos\theta -m),$$

$$dR/dl_0= -(1+\varepsilon_0)q_y,\ dH/dl_0= -(1+\varepsilon_0)q_z, \quad (15)$$

Нормальную силу N в поперечном сечении определяем с помощью вертикального и горизонтального составляющих усилия. Из рис.4.4 можно записать $\overline{N} = \overline{H} + \overline{R}$ или $\overline{N} \cdot \bar{i} = \overline{H} \cdot \bar{i} + \overline{R} \cdot \bar{i}$

Откуда нетрудно показать, что N=Hcosθ + Rsinθ (16)

Поперечная сила в сечении определяется как Q = Hsinθ -Rcosθ (17)

Таким образом, получили систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений плоского изгиба стержней при термомеханическом нагружении. Система состоит из трех уравнений геометрии (2),(7) и из трех уравнений статики (11) совместно с уравнениями (10) и (4.12). Заметим, что из приведенных выше уравнений при θ_0=0 и $\rho_0\to\infty$ получим уравнения изгиба прямых стержней. Соответственно будем иметь $dl_0 = dz$ и из уравнений геометрии (2), (7)

$$\frac{dv}{dz} = (1+\varepsilon_0)\sin\theta$$
$$\frac{dw}{dz} = (1+\varepsilon_0)\cos\theta - 1 \quad (18)$$
$$\frac{d\theta}{dz} = \kappa_x$$

Уравнения статики получим из системы (11):

$$dM/dz=(1+\varepsilon_0)(H\sin\theta-R\cos\theta -m),\ dR/dz= -(1+\varepsilon_0)q_y,\ dH/dz= -(1+\varepsilon_0)q_z, \quad (19)$$

Радиус кривизны стержня после деформации определяется по формуле:

$$\rho = \frac{1+\varepsilon_0}{\kappa_x} \quad (20)$$

Уравнения (13) и (144.14) совместно с уравнениями (10) и (11) составляют замкнутую систему, которая описывает плоский изгиб прямого стержня при термо механическом нагружении.

Полученная система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с граничными условиями эффективно решается численными методами, в частности методом продолжения решения по параметру с параллельной пристрелкой [3].

Список литературы

1. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней. – М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. литературы, 1986. – 296 с.

2. Светлицкий В.А. Механика стержней. В 2-х ч. – М.: Высшая школа, 1987. – Ч. 1 – 320 с.; Ч. 2 – 304 с.

3. Коновалов А.А. Дифференциальные уравнения для больших перемещений пространственного стержня. – Ижевск, 1974.