Байсарова Гулбану Гасанкулиевна
магистр техн. наук, старший преподаватель
Каспийский государственный университет
технологий и инжиниринга им. Ш. Есенова
г. Актау, Республика Казахстан

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Аннотация*: в статье представлены методы определения температурных напряжений в стержне треугольного поперечного сечения. Рассмотрены напряжения и перемещения в стержне при термомеханическом нагружении. Записана формула для расчета нормального напряжения в дали от концов незакрепленного стержня. распределение температуры симметрично относительно оси z. Определены свойства перемещения произвольной точки сечения вдоль оси z, на основании гипотезы плоских сечений.*

Ключевые слова*: уравнение, основные уравнения, теплопроводность.*

Уравнение теплопроводности (уравнение Фурье) в декартовых координатах имеет следующий вид [1; 2]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{c\gamma} Q \qquad (1)$$

где c – теплоемкость твердого тела, T – температура, $a = \lambda/(c\gamma)$ - коэффициент температуропроводности, γ – плотность материала, λ – теплопроводность твердого тела, Q - плотность внутренних источников тепла.

Мощность источника (стока), т.е. объемная плотность теплового потока Q - это количество теплоты, выделяемое (поглощаемое) единицей объема тела в единицу времени. Единицей этой величины является [Дж/(м^{3}с)] или [Вт/м^3]. Если задана мощность нагреваемого источника [Вт], то для определения плотности теплового потока необходимо мощность нагреваемого источника разделить на объем тела. При отсутствии источников теплоты в теле $Q = 0$ и уравнение (1) упрощается. Для интегрирования дифференциального уравнения в частных производных (2.1) Необходимо начальное и граничные условия. Начальное условие, например:

при $t = 0, T(x, y, z) = T_f = const$ (2)

Для искомой функции температуры могут быть заданы следующие граничные условия [1; 2]:

1. Граничные условия первого рода, когда задают температуры на ограничивающих тело поверхностях. В общем случае температура на границе может зависеть от координат точек границы и времени.

$$\begin{gathered} t > 0; T(x,y,z,t)_{z=0,l} = T_1(x,y,z,t)_{z=0,l}; T(x,y,z,t)_{y=0,h} = T_2(x,y,z,t)_{y=0,h}; \\ T(x,y,z,t)_{x=0,b} = T_3(x,y,z,t)_{x=0,b} \end{gathered} \quad (3)$$

2. Граничные условия второго рода, когда на поверхности задана плотность теплового потока, т.е. производная от температуры по нормали к поверхности в виде функции времени и координат точек поверхности.

3. Граничные условия третьего рода, в которых тепловой поток предполагается пропорциональным разности температур поверхности и окружающей среды

$$t > 0; -\lambda[\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial x}]_{x=0,b} = \alpha[T(x,y,z,t) - T_f]_{x=0,b}$$

$$t > 0; -\lambda[\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial y}]_{y=0,h} = \alpha[T(x,y,z,t) - T_f]_{y=0,h} \quad (4)$$

$$t > 0; -\lambda[\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial z}]_{z=0,l} = \alpha[T(x,y,z,t) - T_f]_{z=0,l}$$

Граничные условия четвертого рода (условия сопряжения), которые сводятся к одновременному заданию равенства температур и тепловых потоков на границе раздела, когда решается задача о теплообмене двух сред (твердое тело-жидкость, тело-тело, жидкость-жидкость), в каждой из которых перенос теплоты описывается уравнением

$$T_1 = T_2 \ \Big|_{\text{гр}}, \ -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \ \Big|_{\text{гр}} \quad (5)$$

Эти условия допускают различные модификации в зависимости от физических условий на границе раздела сред. Так, например, если контакт между двумя твердыми телами не является идеальным, то первое условие (5) может содержать скачок температур. Если на границе раздела имеются источники теплоты (химическая реакция, фазовый переход), то во второе условие (5) следует включить тепловой поток, возникающий в результате наличия поверхностного источника.

Когда внутренний источник теплоты в теле распространяется на определенном участке или объему, или локализован в точке, то в уравнение теплопроводности плотность теплового потока Q следует учитывать с помощью обобщенных функции Дирака δ или Хэвисайда H_1.

Для одномерной задачи точечный источник теплоты записывается с помощью δ функции Дирака (единичная импульсная функция) в виде $Q\delta(y-y_0)$, где y_0 координата источника. Аналогично можно учитывать источники теплоты для двухмерных и трехмерных задач с помощью многомерных δ функций. Многомерные функции могут быть представлены в виде произведения одномерных функции в количестве, равном размерности пространства, на котором определена многомерная функция.

При двухмерной задаче для учета в уравнении теплопроводности источника теплоты с координатами x_0, y_0 имеем $Q\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$. Для трехмерной задачи при точечном источнике теплоты с координатами x_0, y_0, z_0 имеем: $Q\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$ и уравнение (2.1) примет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{c\gamma} Q\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) \tag{6}$$

Первообразной одномерной δ функции является функция Хэвисайда (функция единичного скачка) $H_1(x)=0, x<0; H_1(x)=1, x \ge 0$. Значение функции при аргументе равном нулю, может явно указываться в записи функции, например $H_1(x)=1/2, x=0$. В системе Mathcad функция Хэвисайда возвращает 1 если $x \ge 0$, иначе 0. Ступенчатая функция Хэвисайда может быть использована для создания импульса шириной a, $H_1(x)-H_1(x-a)$ который продолжает воздействие. Если стержень нагревается на участке $[a,b]$, то плотность теплового потока в уравнении теплопроводности можно учитывать с помощью функции Хэвисайда следующим образом: $Q\cdot[H_1(x-a)-H_1(x-b)]$ и уравнение теплопроводности примет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial x^2})+\frac{1}{c\gamma}Q[H_1(x-a)-H_1(x-b)] \tag{7}$$

Доказано [3], что искомую функцию температуры можно представить как произведение трех функции, каждую из которых можно написать на основании решения для неограниченной стенки, если представить параллелепипед как пересечение трех так стенок. Решение представляется в виде ряда [3]. Коэффициенты и корни характеристического уравнения входящие в ряде определяются по графикам, что достаточно неудобно для практических расчетов и ограничивает возможности применения компьютера для расчета. Поэтому, для решения практических задач необходимо использовать численные методы.

Список литературы

1. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней. – М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. литературы, 1986. – 296 с.

2. Светлицкий В.А. Механика стержней. В 2-х ч. – М.: Высшая школа, 1987. – Ч. 1 – 320 с.; Ч. 2 – 304 с.

3. Коновалов А.А. Дифференциальные уравнения для больших перемещений пространственного стержня. – Ижевск. 1974.