Курзенева Юлия Николаевна
студентка
ФГБОУ ВО «Поволжский государственный
технологический университет»
г. Йошкар-Ола, Республика Марий Эл

ЗАДАЧИ ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

***Аннотация**: рассмотренная в статье задача относится к классу задач дробно-линейного программирования, если целевая функция представляет собой отношение линейных функций, а все условия линейные.*

***Ключевые слова**: дробно-линейное программирование, симплекс-метод, единичный базис.*

Общая задача дробно-линейного программирования состоит в определении максимального значения функции $F=\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j}=\frac{F_1}{F_2}$ при условиях $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i (i=\overline{1,m}), x_j \geq 0 (j=\overline{1,m})$, где c_j, d_j, b_j и a_j – некоторые постоянные числа [1].

Рассмотрим в качестве примера задачу. Для производства двух видов изделий A и B предприятие использует два типа технологического оборудования. Оборудование обоих типов предприятие может использовать не более 10 часов. Необходимо определить, сколько изделий каждого вида следует изготовить предприятию, чтобы прибыль производства была бы максимальной. Предположим, что предприятие изготовит x_1 изделий вида A и x_2 изделий B. Тогда затраты на их производство равны $2x_1+x_2$, а прибыль предприятия составит $F=\frac{2x_1+x_2}{1{,}5x_1+x_2+4}$. Затраты времени на обработку указанного количества изделий на каждом из типов оборудования составит $4x_1+x_2$ часов и x_1+4x_2 часов. Так как оборудование и первого, и второго типа могут быть заняты обработкой изделий вида A и B не более 10 часов, то должны выполняться следующие неравенства

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 + 4x_2 \le 10 \end{cases}$$

По своему экономическому смыслу переменные x_1 и x_2 могут принимать только неотрицательные значения: $x_1, x_2 \ge 0$ [2].

Таким образом, математическая подстановка задачи состоит в определении неотрицательного решения системы линейных неравенств, при котором достигается максимум функции. Чтобы найти решение задачи, прежде всего, строим многоугольник решений (четырехугольник ABCD). Функция принимает максимальное значение в одной из точек – A, B, C или D. Чтобы определить, в какой именно, положим начало функции F равным некоторому числу, например, $\frac{6}{9}$, то есть, предположим, что $\frac{2x_1 + x_2}{1{,}5x_1 + x_2 + 4} = \frac{6}{9}$. Точкой пересечения данной прямой с многоугольником решений будет являться точка C(2;2).

Аналогично можно рассмотреть значения функции равные $\frac{500}{775}$ и $\frac{25}{65}$.

Таким образом, определяем, что оптимальным планом производства продукции является план, согласно которому изготовляются 2 изделия вида A и 2 изделия вида B. При таком плане прибыль производства является максимальной и равна $F_{\max} = \frac{2}{3}$.

Разберем задачу дробно-линейного программирования симплекс-методом. Приведем данную задачу к каноническому виду: $z = \frac{2x_1 + x_2}{1.5x_1 + x_2 + 4} \to \max$ при ограничениях $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 10 \end{cases}$ $x_{1,2 \ge 0}, j = \overline{1{,}4}$. Тогда задача примет вид $L = 2y_1 + y_2 \to \max$. Решим полученную задачу симплекс-методом. Введем дополнительную переменную, чтобы получить единичный базис. Составляем симплекс-таблицу и в последней оценочной строке есть отрицательные оценки, поэтому нужно делать шаг симплекс-метода. Выбираем столбец с наименьшей оценкой, а затем разрешающий элемент – по наименьшему отношению свободных членов к коэффициентам столбца. Результат шага запишем в таблицу. Аналогично будем повторять шаги.

В итоге, возвращаясь к исходным переменным, получим: $x_{1,2} = \frac{y_{1,2}}{y_0} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{9}} = 2$;

$z_{\max} = \frac{2}{3}$

Таким образом, ценность решения задач дробно-линейного программирования объясняется возможностью на основании найденного минимума функции, определить количество изготавливаемых изделий, при котором себестоимость одного изделия была бы минимальной. Это позволяет принимать важные управленческие решения и моделировать реальную производственную ситуацию, что особенно ценно сейчас, в век широкого применения информационных технологий при решении реальных задач.

Список литературы

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986. – 317 с.

2. Немкова Е.А. Решение интервальной задачи дробно-линейного программирования сведением к задаче линейного программирования / Е.А. Немкова, В.И. Левин // Молодой ученый. – 2011. – №8. – Т. 1. – С. 30–34.