***Автор:***

***Дмитриев Егор Андреевич***

студент

ФГАОУ ВО «Самарский национальный

исследовательский университет

им. академика С.П. Королева»

г. Самара, Самарская область

# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ МЕТОДОМ СЕТОК

***Аннотация***: *в данной работе рассматривается численное решение краевой задачи математической физики методом сеток.*

***Ключевые слова***: *краевые задачи, математическая физика, метод сеток.*

## *Введение*

Исследование многих физических процессов, в частности процессов диффузии, связано с отысканием решения задачи математической физики и исследованием полученного решения. В данной работе рассматриваются численные методы, для решения задачи диффузии в цилиндре конечной длинны используется метод сеток.

## *Математическая постановка задачи*

Рассмотрим процесс диффузии в полой трубке, предполагая, что во всякий момент времени концентрация газа по сечению трубки одинакова. Также будем учитывать следующие предположения:

1. Диффузия через боковую поверхность трубки отсутствует.
2. Коэффициент диффузии является константой и не зависит от координаты.

Процесс диффузии будем описывать функцией $u(x,t)$, представляющей концентрацию газа в сечении в момент времени $t$.

Согласно закону Нернста масса газа, протекающая через сечение $x$ за промежуток времени $(t,t+\Delta t)$, равна

$$dQ = -D\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)Sdt\,, \tag{1}$$

где $D$ – коэффициент диффузии, $S$ – площадь сечения трубки.

По определению концентрации, количество газа в объеме равно

$$Q = uV\,;$$

отсюда получаем, что изменение массы газа на участке трубки $(x_1, x_2)$ при изменении концентрации на $\Delta u$ равно

$$\Delta Q = \int_{x_1}^{x_2} \Delta u S dx\,. \tag{2}$$

Составим уравнение баланса массы газа на участке трубки $(x_1, x_2)$ за промежуток времени $(t_1, t_2)$ , используя уравнения (1) и (2):

$$SD\int_{t_1}^{t1}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_2,\tau) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_1,\tau)\right]d\tau + S\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2}\beta(\xi)u(\xi,\tau)d\xi d\tau =$$

$$= S\int_{x_1}^{x_2}\left[u(\xi,t_2) - u(\xi,t_1)\right]d\xi\,.$$

Представим это уравнение в следующем виде:

$$D\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}(\xi,\tau)\right) + \beta(\xi)u(\xi,\tau)\right]d\xi d\tau =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\xi,\tau)\right]d\xi d\tau\,.$$

Продифференцировав последнее равенство, приходим к уравнению диффузии в дифференциальной форме (для удобства в дальнейшем вместо $u(x,t)$ будем писать просто $u$, подразумевая, что это функция от двух аргументов, а вместо $\beta(x)$ – просто $\beta$, учитывая тот факт, что в нашей задаче этот коэффициент является константой):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta u\,.$$

Таким образом, получаем следующую математическую модель для нашей задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta u; \\ \left[\dfrac{\partial u}{\partial x} - H(u - u_c)\right]_{x=0} = 0; \\ \left[\dfrac{\partial u}{\partial x} + H(u - u_c)\right]_{x=l} = 0; \\ u\big|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \le x \le l. \end{cases}$$

*Построение явной разностной схемы*

Для построения разностной схемы заменим область непрерывного изменения аргументов функции $u(x,t)$ равномерной сеткой:

$$\{x_i = ih_x\} \times \{t_k = kh_t\}, \text{ где } \begin{cases} i = \overline{0,I} \quad h_x = \dfrac{l}{I} \\ k = \overline{0,K} \quad h_t = \dfrac{T}{K} \end{cases}$$

$h_x$ – шаг разбиения по оси $x$, $I$ – количество интервалов по $x$,

$h_t$ – шаг разбиения по времени, $K$ – количество интервалов по времени.

Аппроксимируем на этой сетке производные разностными соотношениями:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(x_i,t_k)} \cong \frac{u(x_i,t_{k+1}) - u(x_i,t_k)}{h_t}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_i,t_k)} \cong \frac{u(x_i,t_k) - u(x_{i-1},t_k)}{h_x}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(x_i,t_k)} \cong \frac{u(x_{i+1},t_k) - 2u(x_i,t_k) - u(x_{i-1},t_k)}{h_x^2}$$

Начальное условие аппроксимируется следующим образом:

$$u_i^0 = 1 - \cos\frac{2\pi h_x i}{l} \quad i = \overline{0,I}\,.$$

Граничные условия аппроксимируются выражениями:

$$\frac{u_1^k - u_0^k}{h_x} = H(u_0^k - u_c), \quad k = \overline{1,K}$$

$$\frac{u_I^k - u_{I-1}^k}{h_x} = -H(u_I^k - u_c); \quad k = \overline{1,K}.$$

Получим явную разностную схему:

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1}-u_i^k}{h_t}=D\dfrac{u_{i+1}^k-2u_i^k+u_{i-1}^k}{h_x^2}+\beta u_i^k, \quad i=\overline{1,I-1}, k=\overline{0,K-1} \\ \dfrac{u_1^k-u_0^k}{h_x}=H\left(u_0^k-u_c\right), \quad k=\overline{1,K} \\ \dfrac{u_I^k-u_{I-1}^k}{h_x}=-H\left(u_I^k-u_c\right), \quad k=\overline{1,K} \\ u_i^0=1-\cos\dfrac{2\pi \mathrm{h_x} i}{l} \quad i=\overline{0,I} \end{cases}$$

Для вычислений преобразуем к следующему виду:

$$\begin{cases} u_i^{k+1}=\left(1-2\dfrac{h_t}{h_x^2}D+\beta h_t\right)u_i^k+D\dfrac{h_t}{h_x^2}\left(u_{i+1}^k+u_{i-1}^k\right), \quad i=\overline{1,I-1}, k=\overline{0,K-1} \\ u_0^k=\dfrac{u_1^k/h_x+Hu_c}{H+1/h_x}, \quad k=\overline{1,K} \\ u_I^k=\dfrac{u_{I-1}^k/h_x+Hu_c}{H+1/h_x}, \quad k=\overline{1,K} \\ u_i^0=1-\cos\dfrac{2\pi \mathrm{h_x} i}{l} \quad i=\overline{0,I} \end{cases}$$

***Список литературы***

1. Емельянов В.М. Уравнения математической физики / В.М. Емельянов, Б.А. Рыбакина. – СПб.: Лань, 2008.