Кетов Антон Викторович
канд. техн. наук, доцент
ФГБОУ ВО «Дальневосточный государственный
университет путей сообщения»
г. Хабаровск, Хабаровский край

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТА ЗУБЬЕВ

Аннотация*: в данной статье приводится описание математической модели зацепления зубьев в цилиндрических передачах Новикова с учетом их погрешностей.*

Ключевые слова*: зубчатое зацепление, матричный метод.*

Производящая поверхность p_i зубчатой рейки описывается [1] матрицей:

$$\tilde{r}_{pi} = \left\| \begin{matrix} u_i \\ \rho_{l_i} \cos\vartheta_{l_i} + a_{l_i} \pm j\pi m_n + \delta_{t_{ij}} \\ \rho_{l_i} \sin\vartheta_{l_i} + b_{l_i} \\ 1 \end{matrix} \right\|, \quad (1)$$

где u_i, ϑ_{l_i} – параметры производящей поверхности зубчатой рейки,

$i = 1{,}2$ – индекс зубчатого колеса и соответствующей производящей рейки,

$j = \pm 1, \pm 2, \ldots$ – порядковый номер зуба,

l – индекс участка исходного контура,

$a_{l_i} = a_l + \delta_{a_{li}},\ b_{l_i} = b_l + \delta_{b_{li}},\ \rho_{l_i} = \rho_l + \delta_{\rho a_{li}},\ a_l,\ b_l,\ \rho_l$ – номинальные координаты центра кривизны и радиус кривизны l-го участка исходного контура,

$\delta_{t_{ij}}$ – накопленная погрешность нормального шага для j-го зуба.

Верхние знаки в выражении (1) и дальше соответствуют i=1, нижние – i=2.

Из (1) выводим орт нормали к производящей поверхности в виде матрицы:

$$\tilde{e}_{pi} = \left\| \begin{matrix} 0 \\ -\cos\vartheta_{l_i} \\ -\sin\vartheta_{l_i} \\ 0 \end{matrix} \right\|, \quad (2)$$

Поверхности зубьев колёс $(i = 1{,}2)$ являются огибающими однопараметрического семейства производящих поверхностей и описываются [1] в виде:

$$\left.\begin{array}{c}\tilde{r}_i = \tilde{A}_i(\psi_i)\cdot\tilde{r}_{pi}(u_i,\vartheta_i),\\ \tilde{e}_i = \tilde{A}_i(\psi_i)\cdot\tilde{e}_{pi}(u_i,\vartheta_i),\\ f_i(u_i,\vartheta_i,\psi_i) = 0,\end{array}\right\}, \qquad (3)$$

где $\tilde{r}_i, \tilde{e}_i$ – матрицы радиус-вектора и орта нормали поверхности зуба колеса,

$\tilde{A}_i(\psi_i)$ – матрица перехода, описывающая относительное движение (с параметром ψ_i) производящей поверхности рейки и зубчатого колеса,

$f_i(u_i,\vartheta_i,\psi_i) = 0$ – уравнение зацепления, связывающее параметры u_i, ϑ_i и угол ψ_i поворота колеса в станочном зацеплении,

$\tilde{r}_{pi}, \tilde{e}_{pi}$ – матрицы радиус-вектора и орта нормали производящей поверхности в системе координат S_{p_i}.

Используя переходы между системами координат в станочных зацеплениях для цилиндрических зубчатых колёс Новикова с учётом их погрешностей, получим выражение для матрицы перехода от системы S_{p_i} к S_i:

$$\tilde{A}_i = \left\|\begin{array}{cccc}\mp\sin\beta_i\cos\psi_i & \cos\beta_i\cos\psi_i & \mp\sin\psi_i & \pm[r_i\,\psi_i\cos\psi_i \text{-} (r_i+\Delta h_i)\sin\psi_i]\\ \text{-}\sin\beta_i\sin\psi_i & \pm\cos\beta_i\sin\psi_i & \cos\psi_i & r_i\,\psi_i\sin\psi_i + (r_i+\Delta h_i)\cos\psi_i\\ \cos\beta_i & \pm\sin\beta_i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right\|, \qquad (4)$$

где $\beta_i = \beta + \delta_{\beta_i}$, $\Delta h_i = x_i m_n + \delta_{h_i}$,

ψ_i – угол поворота зубчатого колеса в станочном зацеплении (*параметр* относительного движения производящей поверхности рейки и колеса),

r_i – радиус делительной окружности зубчатого колеса,

β – номинальный угол наклона линии зуба,

x_i – коэффициент смещения исходного контура,

m_n – модуль нормальный,

δ_{β_i},δ_{h_i}-погрешности соответственно угла наклона и смещения исходного контура.

Уравнение зацепления получим кинематическим методом [1] способом [2]:

$$u_i\sin\beta_i \text{-} r_i\,\psi_i \pm (b_{li}+\Delta h_i)\cos\beta_i\operatorname{ctg}\vartheta_{l_i} \mp \left(a_{l_i} \pm j\pi m_n + \delta_{t_{ij}}\right)\cos\beta_i = 0, \qquad (5)$$

Отсюда имеем выражение для параметра ψ_i:

$$\psi_i = \left\{u_i\sin\beta_i \mp \cos\beta_i\left[a_{l_i} \pm j\pi m_n + \delta_{t_{ij}} \text{-} (b_{li}+\Delta h_i)\operatorname{ctg}\vartheta_{l_i}\right]\right\} / \, r_i, \qquad (6)$$

Выражения (1) … (6) дают математическую модель поверхностей зубьев цилиндрических колёс Новикова при наличии погрешностей их изготовления.

Точки касания поверхностей зубьев в передаче определяются решением известной [1] системы уравнений, выражающей равенство радиус-векторов и ортов нормалей поверхностей зубьев колёс 1 и 2 в общей системе координат S:

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{M}_1(\varphi_1)\cdot\tilde{r}_1 &= \tilde{L}\cdot\widetilde{M}_2(\varphi_2)\cdot\tilde{r}_2,\\ \widetilde{M}_1(\varphi_1)\cdot\tilde{e}_1 &= \tilde{L}\cdot\widetilde{M}_2(\varphi_2)\cdot\tilde{e}_2,\end{aligned}\right\}, \qquad (7)$$

где $\widetilde{M}_i$ – матрица перехода, описывающая поворот i-го колеса на угол φ_i,

$\tilde{L}$ – матрица перехода, описывающая переход между осями зубчатых колёс.

Определяем элементы матрицы $\widetilde{M}_i$ с учетом возможного эксцентриситета:

$$\tilde{A}_i = \begin{Vmatrix} \cos\varphi_i & \pm\sin\varphi_i & 0 & l_i\sin\gamma_i \\ \pm\sin\varphi_i & \cos\varphi_i & 0 & l_i\cos\gamma_i \\ \cos\beta_i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad (8)$$

где φ_i – угол поворота зубчатого колеса вокруг своей оси вращения,

l_i, γ_i – эксцентриситет зубчатого венца и фазовый угол эксцентриситета.

С учетом возможных погрешностей положения осей зубчатых колёс, матрица перехода $\tilde{L}$ имеет вид:

$$\tilde{L} = \begin{Vmatrix} -\cos\delta & \sin\delta_x\sin\delta & -\cos\delta_x\sin\delta & 0 \\ 0 & -\cos\delta_x & -\sin\delta_x & a_w + f_{ar} \\ -\sin\delta & -\sin\delta_x\cos\delta & \cos\delta_x\cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad (9)$$

где $\delta = \operatorname{arctg}\left(\cos\delta_x\cdot\operatorname{tg}\delta_y\right)$,

δ_x, δ_y – соответственно углы непараллельности и перекоса осей зубчатых колёс,

a_w – номинальное межосевое расстояние,

f_{ar} – отклонение межосевого расстояния.

Система матричных уравнений (7) эквивалентна системе из 5 независимых скалярных уравнений, которую надо решать относительно 5-ти параметров $u_1, \vartheta_1, u_2, \vartheta_2, \varphi_2$ (соответствующих точке касания зубьев) при фиксированном значении параметра φ_1 и погрешностей изготовления зубчатой передачи. Трудности решения обусловлены трансцендентностью уравнений системы.

Список литературы

1. Литвин Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений / Ф.Л. Литвин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1968. – 584 с.

2. Ерихов М.Л. Теория зубчатых зацеплений // Теория передач в машинах: Сб. статей. – М.: Машиностроение, 1966. – С. 78–91.