Решоткина Наталья Алексеевна
учитель математики
МОБУ «Люльпанская СОШ»
д. Люльпаны, Республики Марий Эл

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

***Аннотация**: в статье рассматриваются основные способы решения задач с параметрами, приводятся примеры решения, предлагаются задания для отработки способов решения.*

***Ключевые слова**: задачи с параметрами, линейные уравнения, квадратные уравнения, дробно-рациональные уравнения, сводящиеся к линейным, уравнения с параметрами, содержащие знак модуля, графический метод решения задач с параметром.*

Задачи с параметрами являются одними из самых сложных заданий на экзаменах по математике в 9 и 11 классах.

Рассматриваемый материал не входит в базовый уровень, поэтому решению задач с параметрами в школьной программе уделяется мало внимания. Большинство учащихся либо вовсе не справляются с такими задачами, либо приводят громоздкие выкладки. Причиной этого является отсутствие системы заданий по данной теме в школьных учебниках.

В своё время в связи с переходом на профильное обучение возникла необходимость в обеспечении углубленного изучения предмета математики и подготовки учащихся к продолжению образования. Профильность обучения достигалась за счет различных учебных курсов, в том числе элективных курсов. В 2010 году мной был разработан и проведен элективный курс для девятиклассников по теме: «Решение задач с параметрами». Основными формами его проведения являлись изложение узловых вопросов курса в виде обобщающих лекций, семинаров, практикумов по решению задач.

Прежде чем начать изучать методы решения задач с параметрами, учащиеся должны иметь представление, что же такое параметр, какие типы задач с параметрами бывают, что значит решить задачу с параметром, какие существуют способы решения задач с параметрами. Поэтому первый урок, посвященный данной теме, я провожу в виде лекции, где рассматриваю основные теоретические вопросы, связанные с параметрами.

Существует множество книг, статей, пособий различных авторов, где рассматриваются различные методы и способы решения задач данного вида. В данной статье я приведу лишь методы решения линейных, квадратных и дробно-рациональных уравнений с параметрами, а также уравнений, содержащих модуль, которые мы рассматриваем с обучающимися при подготовке к ОГЭ, поскольку именно эти виды уравнений изучаются в основной школе и включаются в часть 2 модуля «Алгебра» ОГЭ по математике.

Вначале рассмотрим аналитический метод решения задач с параметром.

Линейные уравнения

Линейное уравнение, записанное в общем виде, можно рассматривать как уравнение с параметрами: $ax = b$, где x – неизвестное, a, b – параметры. Для этого уравнения особым или контрольным значением параметра является то, при котором обращается в нуль коэффициент при неизвестном.

При решении линейного уравнения с параметром рассматриваются случаи, когда параметр равен своему особому значению и отличен от него.

Особым значением параметра a является значение a = 0.

1. Если $a \neq 0$, то при любой паре параметров a и b оно имеет единственное решение $x = \frac{b}{a}$.

2. Если $a = 0$, то уравнение принимает вид: $0x = b$. В этом случае значение $b = 0$ является особым значением параметра b.

При $b \neq 0$ уравнение решений не имеет.

При $b = 0$ уравнение примет вид: $0 \cdot x = 0$. Решением данного уравнения является любое действительное число.

Пример: Для всех значений параметра a решить уравнение

$$2a\,(a - 2)\,x = a - 2 \qquad (1)$$

Решение. Здесь контрольными будут те значения параметра, при которых коэффициент при x обращается в 0. Такими значениями являются a = 0 и a = 2. При этих значениях a невозможно деление обеих частей уравнения на коэффициент при x. В то же время при значениях параметра $a \neq 0$, $a \neq 2$ это деление возможно. Таким образом, целесообразно решить уравнение (1) как семейство уравнений, получающихся из него при следующих значениях параметра:

1) a=0; 2) a=2; 3) $a \neq 0$, $a \neq 2$.

Рассмотрим эти случаи.

1) при $a = 0$ уравнение (1) принимает вид $0 \cdot x = -2$. Это уравнение не имеет корней;

2) при $a = 2$ уравнение (1) принимает вид $0 \cdot x = 0$. Корнем этого уравнения является любое действительное число;

3) при $a \neq 0$, $a \neq 2$ из уравнения (1) получаем, $x = \frac{a-2}{2a(a-2)}$, откуда $x = \frac{1}{2a}$.

Ответ: 1) если $a = 0$, то корней нет; 2) если $a = 2$, то x – любое действительное число; 3) если $a \neq 0$, $a \neq 2$, то $x = \frac{1}{2a}$.

Квадратные уравнения

Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ можно рассматривать как уравнение с параметрами, где x – неизвестное, a, b, c – параметры.

Уравнение исследуется по следующей схеме.

1) если a = 0, то имеем линейное уравнение bx + c = 0;

2) если $a \neq 0$ и дискриминант уравнения $D < 0$, то уравнение не имеет решений;

3) если $a \neq 0$ и дискриминант уравнения $D = 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = -\frac{b}{2a}$;

4) если $a \neq 0$ и дискриминант уравнения $D > 0$, то уравнение имеет два различных решения $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Пример: При каких значениях параметра a уравнение $(a + 6)x^2 + 2ax + 1 = 0$ (3) имеет единственное решение.

Решение. По условию задачи уравнение необязательно является квадратным, поэтому, как и в примере 2, надо рассмотреть два случая.

1) $a + 6 = 0$, $a = -6$. При этом получаем линейное уравнение $-12x + 1 = 0$, которое имеет единственное решение. Это решение по условию задачи необязательно находить;

2) $a \neq -6$. В этом случае уравнение (3) является квадратным и имеет единственное решение, если дискриминант D=0, т.е.

$D=4a^2 - 4(a + 6) = 4(a^2 - a - 6)=0 \Leftrightarrow (a^2 - a - 6) = 0 \Leftrightarrow a_1 = 3, a_2 = -2.$

Ответ: уравнение имеет единственное решение при $a = -6$, $a = -2$, $a = 3$.

Дробно-рациональные уравнения, сводящиеся к линейным

Процесс решения дробных уравнений протекает по обычной схеме: дробное уравнение заменяется целым путем умножения обеих частей уравнения на общий знаменатель левой и правой его частей. После чего учащиеся решают известным им способом целое уравнение, исключая посторонние корни, т. е. числа, которые обращают общий знаменатель в нуль. В случае уравнений с параметрами эта задача более сложная. Здесь, чтобы исключить посторонние корни, требуется находить значение параметра, обращающее общий знаменатель в нуль, т. е. решать соответствующие уравнения относительно параметра.

Пример: Для всех значений параметра а решить уравнение

$$\frac{1}{x-2a} = \frac{2}{ax-1}.$$

Решение. Уравнение имеет смысл при $x - 2a \neq 0$ и $ax - 1 \neq 0$, т.е. $x \neq 2a$, $ax \neq 1$.

Если $x \neq 2a$, $ax \neq 1$, то умножив обе части уравнения на $(x-2a)(ax-1)$, получим $ax - 1 = 2x - 4a$ или $(a - 2)x = 1 - 4a$.

1) если $a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$, то уравнение имеет вид $0 \cdot x = -7$. Это уравнение корней не имеет;

2) если $a - 2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 2$, то $x = \frac{1-4a}{a-2}$.

Теперь найдем те значения параметра а, при которых $x = 2a$ или $ax = 1$. Имеем:

$\frac{1-4a}{a-2} = 2a \Leftrightarrow 1 - 4a = 2a^2 - 4a \Leftrightarrow a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{1-4a}{a-2} = 1 \Leftrightarrow a - 4a^2 = a - 2 \Leftrightarrow a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Таким образом, если а = $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, то уравнение не имеет решения.

Ответ: если а = $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; а = 2, то уравнение корней не имеет, если а $\neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; а $\neq$ 2, то х = $\frac{1-4a}{a-2}$.

Уравнения с параметрами, содержащие знак модуля

Особого рассмотрения требуют уравнения с параметрами, содержащие модуль.

Пример: При всех значениях параметра *а* решить уравнение:

$|x + 3| - a|x - 1| = 4$.

Решение: Разобьем числовую прямую на 3 части точками, в которых выражения под знаком модуля обращаются в нуль, и решим 3 системы:

1) $\begin{cases} x < -3 \\ -x-3+ax-a=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x < -3 \\ x=\frac{a+7}{a-1}, \text{ если } a\neq 1. \end{cases}$

Найденный х будет решением, если $\frac{a+7}{a\text{-}1}+3<0 \Leftrightarrow \frac{4a+4}{a\text{-}1}<0 \Rightarrow a \in (-1;1)$

2) $\begin{cases} -3\leq x\leq 1 \\ x+3+ax-a=4 \end{cases}$ $\begin{cases} -3\leq x\leq 1 \\ x=\frac{a+1}{a+1}=1, \text{ если } a\neq -1. \end{cases}$

Найденный х удовлетворяет нужному неравенству, следовательно, является решением при а$\neq$ – 1. Если же а = −1, то решением является любой х$\in$[−3;1].

3) $\begin{cases} x>1 \\ x+3\text{-}ax+a=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x>1 \\ x=\frac{1-a}{1-a}=1, \text{ если } a\neq 1. \end{cases}$

Найденный х не удовлетворяет нужному неравенству, следовательно, не является решением при а $\neq$ 1. Если же а = 1, то решением является любой х > 1.

Ответ: при а $\in$ (–1;1) х = $\frac{a+7}{a\text{-}1}$; при а = −1 х$\in$[−3;1]; при а = 1 х$\in$(1;+∞); х=1 является также решением при всех а.

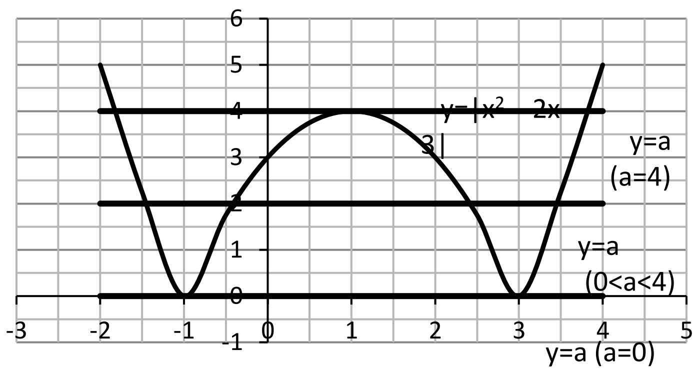
Графический метод решения задач с параметром

Графический способ решения задач с параметром является более удобным, чем аналитический, когда надо не решить уравнение, а указать, сколько решений оно имеет в зависимости от параметра. Графический метод более понятен и более доступен для выпускников 9-х классов, поэтому чаще всего они пользуются именно этим методом. Но перед тем как начать рассматривать данную тему, я провожу урок повторения, посвященный построению графиков различных функций, поскольку графический метод предполагает, что учащиеся хорошо владеют данными навыками.

Пример: Найдите все значения a, при которых прямая y=a пересекает график функции $y=|x^2-2x-3|$ в четырех различных точках.

Решение. Решение данной задачи сводится к решению уравнения вида $|x^2-2x-3|=a$ в зависимости от параметра a.

Построим график функции $y=|x^2-2x-3|$. Для этого вначале найдем координаты вершины параболы x=1, y=-4 и построим график функции $y=x^2-2x-3$. Затем ту часть графика, которая лежит ниже оси x, симметрично отобразим вверх относительно оси x.



Прямая y=a – прямая, параллельная оси x. Из рисунка видно, что прямая y =a пересекает график функции $y=|x^2-2x-3|$ в четырех различных точках, если $0 < a < 4$.

Ответ: $0 < a < 4$.

Другие типы задач с параметрами

Кроме задач, рассмотренных выше, на государственной итоговой аттестации по математике в 9 классе предлагаются ещё и другие варианты заданий, содержащих параметр. Эти задания приводятся в различных сборниках по подготовке к ОГЭ. Рассмотрим один из них.

Пример: При каком значении параметра b прямая $y = -5x + b$ является касательной к параболе $y = 4x^2 - 3x$? Найдите координаты точки касания данных прямой и параболы.

Решение. Прямая $y = -5x + b$ касается параболы $y = 4x^2 - 3x$ лишь в том случае, если имеет с этой параболой единственную общую точку, т.е. если уравнение $-5x + b = 4x^2 - 3x$ имеет единственный корень. Поскольку уравнение квадратное, то это возможно в том случае, если дискриминант трехчлена $4x^2 + 2x - b$ равен нулю.

$$D = 4 + 16b = 0,\ b = -0{,}25.$$

Абсцисса точки касания прямой $y = -5x - 0{,}25$ и параболы $y = 4x^2 - 3x$ является корнем уравнения $-5x - 0{,}25 = 4x^2 - 3x$, т.е. равна $-0{,}25$. Ординату точки касания находим, подставляя её абсциссу в уравнение прямой:

$$У = -5\cdot(-0{,}25) - 0{,}25 = .$$

Ответ: $b = -0{,}25$; $(-0{,}25;1)$.

Зачастую учащиеся овладевают каким-то одним способом решения подобных заданий и теряются, если он не помогает решить задачу. Поэтому основная задача учителя научить учащихся решать задания с параметрами разными способами, что поможет выпускнику обрести чувство уверенности в своих силах.

Задания для самостоятельного решения

Для всех значений параметра а решить уравнения (№1–5).

1. $(5a + 1)x + 25a^2 + 10a + 1 = 0$ (Ответ: если $a = -0{,}2$, то $x \in R$; если $a \neq -0{,}2$, то $x = -5a-1$)

2. $\frac{(x-4a)(x+2a+3)}{x+3a} = 0$. (Ответ: если $a = 0$, то $x = -3$; если $a = 3$, то $x = 12$; если $a \neq 0$ и $a \neq 3$, то $x = 4a$ и $x = -2a-3$).

3. $3x^2 - 5ax - 2a^2 = 0$. (Ответ: $x = 2a$ и $x = -a/3$ для любого а).

4. $(a + 3)x^2 - (3a + 1)x + a = 0$ (Ответ: если $a = -3$, то $x = 3/8$; если $a \in (\frac{1}{5}; 1)$, то $x \in \varnothing$; если $a = \frac{1}{5}$, то $x = \frac{1}{4}$; если $a = 1$, то $x = 0{,}5$; если $a \in (-\infty; -3) \cup (-3; \frac{1}{5}) \cup (1;+\infty)$, то $x_{1,2} = \frac{3a+1 \pm \sqrt{5a^2-6a+1}}{2(a+3)}$.

5. $\frac{x}{x-a} - \frac{2a}{x+a} = \frac{8a^2}{x^2-a^2}$. (Ответ: если a = 0, то $x \in \varnothing$; если $a \neq 0$, то x = −2a и x = 3a.)

6. Найдите все значения a, при которых уравнение $|3|x| - a^2| = x - a$ имеет ровно три различных решения. (Ответ: a = −3, a = −1)

7. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $||x - a| - 2| = x+4$ имеет бесконечное число корней. (Ответ: a = −2, a = −6)

8. Найдите все значения k, при которых прямая y = kx пересекает график функции $y = ||2x - 10|-4|$ в четырех различных точках. (Ответ: 0 < k < 0,8)

9. Найдите все положительные значения k, при которых прямая y = kx пересекает в двух различных точках ломаную, заданную условиями:

$$y = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| \leq 3 \\ -2x-5, & \text{если } x<-3 \\ 2x-5, & \text{если } x > 3 \end{cases}$$

(Ответ: $\frac{1}{3} < k < 2$)

10. Найдите все значения m, при котором точки A (−3;15), B (9; −5) и C (24;m) лежат на одной прямой. (Ответ: m = − 30)

11. Найдите все значения a, при которых точка пересечения прямых y = 2x + 1 и y = a−5x находится в первой координатной четверти. (Ответ: a > 1.)

12. Парабола $y = x^2 + bx + c$, симметричная относительно прямой x = −2, касается прямой y = x + 3. Найдите коэффициенты b, c. (Ответ: b = 4, c = 4.)

13. При каких значениях a парабола $y = 3x^2 - 2ax + 4$ и прямая y = a−2 не имеют общих точек? (Ответ: −6 < a < 3)

14. Постройте график функции y = f(x), где

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2+8x+8, & \text{если } x < -1 \\ |x|+1, & \text{если } -1 \leq x \leq 3 \\ \frac{12}{x}, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

При каких значениях m прямая y = m имеет с графиком этой функции три общих точки. (Ответ: $m \in (0;1) \cup (2;4)$)

15. Найдите все значения a, при которых график функции $y = ax^2 - 4x + a$ расположен выше оси абсцисс. (Ответ: (2; +∞).)

Список литературы

1. Горнштейн П.И. Задачи с параметрами / П.И. Горнштейн, В.Б. Полонский, М.С. Якир. – М.: Илекса; Харьков: Гимназия, 2003.

2. Джиоев Н.Д. Нахождение графическим способом числа решений уравнения с параметром // Математика в школе. – 1996 – №2. – С. 54–57.

3. Епифанова Т.Н. Графические методы решения задач с параметрами // Математика в школе. – 2003. – №2. – С. 17–20.

4. Кочарова К.С. Об уравнениях с параметром и модулем // Математика в школе. – 1995 – №2. – С. 2–4.

5. Математика. Учимся решать задачи с параметром. Подготовка к ЕГЭ-2014: задание С5 / Под ред. Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Ростов н/Д: Легион, 2013.

6. Моденов В.П. Задачи с параметрами. – М.: Экзамен, 2006. – 288 с.

7. Мочалов В.В. Уравнения и неравенства с параметрами: Учебное пособие / В.В. Мочалов, В.В. Сильвестров. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. Ун-та, 1997.

8. Ястребинецкий Г.А. Задачи с параметрами. – М.: Просвещение, 1986.

9. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://nsportal.ru

10. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.uztest.ru

11. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.ege.ru