(cc) BY

Лебедева Лариса Владимировна
канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель
ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»
г. Нижний Новгород, Нижегородская область

DOI 10.21661/r-496621

ОСНОВНЫЕ АТТРАКТОРЫ ДИССИПАТИВНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ТОРА

***Аннотация**: в статье определены параметрические области существования и устойчивости неподвижных точек, расположенных вблизи начала координат.*

***Ключевые слова**: отображение тора, неподвижные точки, устойчивость.*

В последнее время теории динамических систем, в частности теории отображений, уделяется большое внимание [1, с. 9; 4, с. 223; 6, с. 89; 7, с. 4]. Связано это с тем, что обнаружены причины и механизмы возникновения сложных хаотических движений в строго детерминированных системах, к которым относятся и предельные множества типа «странный аттрактор», и гомоклинические и гетероклинические структуры, и последовательности бифуркаций удвоения периода и др. Важной задачей исследования динамической системы является задача построения параметрического портрета: разбиения плоскости параметров на области, соответствующие различным топологическим структурам предельного множества.

Рассмотрим отображение

$$F^*\colon \begin{cases} \overline{x} = x + y - a \cdot \sin x \\ \overline{y} = y - b \cdot \sin x \end{cases} \tag{1}$$

Это интересная математическая модель, демонстрирующая многие из вышеперечисленных особенностей строго детерминированных систем. Актуальность исследования отображения (1) еще и в том, что оно описывает работу

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

конкретных современных радиофизических устройств [3, с. 161]. Цель настоящей работы: получение границ области существования аттракторов, расположенных в окрестности нуля.

Общие свойства. Под траекторией отображения F будем понимать последовательность точек $t_0(x_0, y_0)$, $t_1(x_1, y_1)$, … , $t_n(x_n, y_n)$, где $t_i = F(t_{i-1}) = F^{i-1}(t_0)$, т.е. $\{\ x_i = x_{i-1} + y_{i-1} - a \cdot sin\, x_{i-1}\ ;\ \ y_i = y_{i-1} - b \cdot sin\, x_{i-1}\ \}$. Траекторию отображения назовем циклом типа q/p (предполагая, что число p может быть любым натуральным, а число q – любым целым), если равенства $\{x_{n+i} = x_n + 2\pi q;\ \ y_{n+i} = y_n\}$ справедливы при $i = p$, но не выполняются ни при каком $0 < i < p$. Точки, входящие в цикл типа q/p, назовем неподвижными точками типа q/p. Циклы типа $0/p$ соответствуют движению колебательного типа, остальные – вращательного. Остальные используемые в настоящей работе термины можно посмотреть в [1, с. 16; 2, с. 24].

Предположим, что параметры a и b отображения F^* принадлежат области $P = \{a, b/0 < b < a < 4\}$.

Отображение F^* инвариантно относительно одновременной замены $x \to -x$, $y \to -y$, т.е. фазовый портрет системы симметричен относительно начала координат. Замена $x \to x + 2\pi$, $y \to y$ приводит к замене $\overline{x} \to \overline{x} + 2\pi$, $\overline{y} \to \overline{y}$, а при замене $x \to x$, $y \to y + 2\pi$ получаем, $\overline{x} \to \overline{x} + 2\pi$, $\overline{y} \to \overline{y} + 2\pi$. Значит, свойства отображения F^* определяются свойствами отображения $F: \begin{cases} \overline{x} = x + y - a \cdot sin\, x \quad (mod\, 2\,\pi) \\ \overline{y} = y - b \cdot sin\, x \quad (mod\, 2\,\pi) \end{cases}$, являющегося отображением тора.

Неподвижные точки типа $q/1$.

Теорема 1. При всех значениях параметров из области P отображение F имеет неподвижные точки $S_{q/1}(0{,}2\pi q)$ и $U_{q/1}(\pi, 2\pi q)$ типа $q/1$ (где q – любое целое число). При этом неподвижные точки $U_{q/1}$ являются гиперболическими. Тип устойчивости неподвижных точек $S_{q/1}$ при разных значениях параметров приведен в таблице 1.

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Доказательство с очевидностью следует из двух положений. Первое: координаты неподвижных точек типа $q/1$ есть решения системы $\{\overline{x} = x + 2\pi q;\ \overline{y} = y\}$, или системы $\{b \cdot sin\, x = 0;\ \ y = a \cdot sin\, x + 2\pi q\}$. Второе: характеристическое уравнение системы имеет вид: $\begin{vmatrix} (1 - a\, cos\, x) - \lambda & 1 \\ -b \cdot cos\, x & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$

Следствие 1. Неподвижные точки $S_{q/1}$ колебательного типа устойчивы при выполнении неравенства $max\quad (0{,}2a - 4) < b < a$.

Таблица 1

$g_1 = \{a, b/a \in [0{,}2], b \in [0, a)\}$	неустойчивый фокус
$g_2 = \{a, b/a \in (2{,}4), b \in (0, a)\} \cup$ $\{a, b/a \in (4, \infty), b \in (a^2/4, \infty)\}$	неустойчивый обратный фокус
$g_3 = \{a, b/a \in (4, \infty), b \in (2a - 4, a^2/4)\}$	неустойчивый обратный узел
$g_4 = \{a, b/a \in (3, \infty), b \in (a, 2a - 4)\}$	обратное «седло»
$g_5 = \{a, b/a \in (3, \infty), b \in (0, a - 1)\} \cup$ $\{a, b/a \in (2{,}3), b \in (0{,}2a - 4)\}$	неориентируемое «седло»
$g_6 = \{a, b/a \in (1{,}2), b \in (0, a - 1)\} \cup$ $\{a, b/a \in (2{,}3), b \in (2a - 4, a - 1)\}$	неориентируемый устойчивый узел
$g_7 = \{a, b/a \in (0{,}1), b \in (0{,}0.25 + a^2)\} \cup$ $\{a, b/a \in (1{,}2), b \in (a - 1, a^2/4)\}$	устойчивый узел
$g_8 = \{a, b/a \in (2{,}3), b \in (a - 1, a^2/4)\} \cup$ $\{a, b/a \in (3{,}4), b \in (2a - 4, a/4)\}$	обратный устойчивый узел
$g_9 = \{a, b/a \in (0{,}2), b \in (a^2/4, a)\}$	устойчивый фокус
$g_{10} = \{a, b/a \in (2{,}4), b \in (a^2/4, a)\}$	устойчивый обратный фокус

Подчеркнем, что смена устойчивости неподвижных точек $S_{q/1}$ происходит одновременно для всех q.

Циклы типа $q/2$.

Теорема 2. На интервале $[-\pi, \pi)$ отображение F имеет

1) при любом $b < a$ гиперболические неподвижные точки $O^*_{1/2}(x^*, y^*)$, $O^{**}_{1/2}(x^{**}, y^{**})$ типа $q/2$, где q – любое целое нечетное число, координаты этих точек суть решения системы

$$\begin{cases} y = 0.5 \cdot b \cdot sin\, x + \pi q \\ y = a \cdot sin\, x - 2x + 2\pi l \end{cases}, \ l = \ldots, -1{,}0, +1, \ldots \qquad (2)$$

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

2) при любом $b < a$ неподвижные точки $\overline{O}^{*}_{1/2}(0, \pi(2m+1))$, $\overline{O}^{**}_{1/2}(0, \pi(2m+1))$ (типа $q/2$, где q – любое целое четное число), устойчивые в области параметров $g_{11} = \{a, b/a < \sqrt{2}\} \cup \{a, b/\sqrt{2} < a < 2;\ a - b < \sqrt{4 - a^2}\}$ и гиперболические (обратные «седла» или обратные неориентируемые «седла») вне этой области.

3) при любом $b < 2a - 4$ неподвижные точки $O^{*}_{0/2}(x^{*}_{0/2}, y^{*}_{0/2})$, $O^{**}_{0/2}(x^{**}_{0/2}, y^{**}_{0/2})$, координаты которых есть решения системы

$$\begin{cases} y = 0.5 \cdot b \cdot \sin x + \pi q \\ y = a \cdot b \cdot (x - \pi l)/(2 \cdot a - b) \end{cases} l = \ldots, -1, 0, +1, \ldots, \qquad (3)$$

устойчивые, если выполняется неравенство $0 < \cos x < 4/(2a - b)$, и гиперболические в случае невыполнения неравенства, в частности, если $b < 2(a - \pi)$.

Доказательство.

1. Координаты и условия существования неподвижных точек.

Координаты неподвижных точек типа $q/2$ отображения F есть решения системы $\{\overline{x} = x + 2\pi q;\ \overline{y} = y\}$, т.е. системы:

$$\begin{cases} \overline{x} + 2y - (a + b) \cdot \sin x - a \cdot \sin \overline{x} = x + 2\pi q \\ \overline{y} = y - b \cdot (\sin x + \sin \overline{x}) \end{cases} \qquad (4)$$

Решение системы (4) сводится к решению системы A или системы B:

$$(A)\ \begin{cases} 2y - b \cdot \sin x = 2\pi q \\ x + 0.5 \cdot (y - a \cdot \sin x) = \pi l \end{cases} \qquad (B)\ \begin{cases} 2y - b \cdot \sin x = 2\pi q \\ y - a \cdot \sin x = \pi(1 + 2m) \end{cases}$$

Решение системы A. Система A преобразуется к виду

$$\begin{cases} y = 0.5 \cdot b \cdot \sin x + \pi q \\ y = a \cdot \sin x - 2x + 2\pi l \end{cases} \qquad (5)$$

Очевидно, что для любого нечетного q эта система имеет решения $O^{*}_{1/2}(x^{*}_{1/2}, 0.5 \cdot b \cdot \sin x^{*}_{1/2} + \pi q)$, $O^{**}_{1/2}(x^{**}_{1/2}, 0.5 \cdot b \cdot \sin x^{**}_{1/2} + \pi q)$,

где $\pi/2 < x^{*}_{1/2} < \pi$, $x^{**}_{1/2} = -x^{*}_{1/2}$.

При четном значении q система A имеет решение $(x, y) = (0, 2\pi m)$, определяющее неподвижные точки типа $q/1$ $(q = 2m)$. Чтобы вычислить, когда система A может иметь другие решения для четном q, преобразуем (5), считая, что $q = 0$ (т.к. при других четных q координаты неподвижных точек будут отличаться по

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

переменной y на 2π). Для этого выразим $sin\, x$ из первого уравнения и подставим полученное соотношение во второе уравнение.

Система A примет вид: $\begin{cases} y = 0.5 \cdot b \cdot sin\, x \\ y = \frac{2b}{2a-b} \cdot x - \frac{2b}{2a-b} \cdot l \end{cases}$, где $l = \ldots, -1, 0, +1, \ldots$ Эта система имеет нетривиальные решения только при $2b < 2a - b < b/2$, т.е. при $b < 2a - 4$. На интервале $(-\pi, \pi)$ лежат две точки $O^{*}_{0/2}(x^{*}_{0/2}, y^{*}_{0/2})$, $O^{**}_{0/2}(x^{**}_{0/2}, y^{**}_{0/2})$, координаты которых (заметим, что $x^{**}_{0/2} = -x^{*}_{0/2}$, $y^{**}_{0/2} = -y^{*}_{0/2}$) удовлетворяют системе A:

$$\begin{cases} y^{*}_{0/2} = 0.5 \cdot b \cdot sin\, x^{*}_{0/2} \\ y^{*}_{0/2} = 2a \cdot b^{*}_{0/2}/(2 \cdot a - b) \end{cases} \qquad (6)$$

Решение системы B. В результате элементарных преобразований система приводится к виду: $\begin{cases} y = 0.5 \cdot b \cdot sin\, x + \pi q \\ y = a\, sin\, x + \pi(1 + 2m) \end{cases}$, и, очевидно, имеет решение только при нечетном q, а именно: $(x, y) = (\pi m, \pi(1 + 2m))$. Две точки, определяемые этим решением, принадлежат тору $T = \{x, y / x \in [-\pi, \pi],\ y \in [0, \pi]\}$ – неподвижные точки $O^{*}_{1/2}(0, \pi)$, $O^{**}_{1/2}(\pi, \pi)$ типа $2/1$.

2. Условия устойчивости. Характеристическое уравнение отображения F^2 имеет вид: $\lambda^2 + p_1 \lambda + q_1 = 0$,

где $\begin{cases} p_1 = -2 + (a + b) \cdot (cos\, x + cos\, \overline{x}) - a^2\, cos\, x \cdot cos\, \overline{x} \\ q_1 = 1 + (b - a) \cdot (cos\, x + cos\, \overline{x}) - (a - b)^2\, cos\, x \cdot cos\, \overline{x} \end{cases}$.

Неподвижная точка $O(x, y)$ устойчива,

если / 7 / для ее координат выполнены условия $\begin{cases} q_1 > p_1 - 1 \\ q_1 > -p_1 - 1 \\ q_1 < 1 \end{cases}$.

Рассмотрим условия устойчивости неподвижных точек $O^{*}_{1/2}(0, \pi)$, $O^{**}_{1/2}(\pi, \pi)$. Для них $cos\, x = 1$, $cos\, \overline{x} = -1$, т.е. $\begin{cases} p_1 = -2 + a^2 \\ q_1 = 1 - (a - b)^2 \end{cases}$. При $a > b$ имеем $q_1 < 1$. Условие $q_1 > -p_1 - 1$ запишется в виде $b < 2a$, и, значит, при $a > b$ оно выполняется. Условие $q_1 > p_1 - 1$ принимает вид $1 - (a - b)^2 > -2 + a^2 - 1$, т.е. $(a - b)^2 + a^2 < 4$ или $4 - (a - b)^2 > a^2$. Если $a > 2$, т.е. $a^2 > 4$, то

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

неравенство $q_1 > p_1 - 1$ выполняется, и, следовательно, $O^{*}_{1/2}(0,\pi)$, $O^{**}_{1/2}(\pi,\pi)$ – обратные «седла» (или обратные неориентируемые «седла»). Если $a < \sqrt{2}$, то $0 < a - b < \sqrt{2}$, $(a-b)^2 < 2$, $a^2 > 2$, т.е. $(a-b)^2 + a < 4$. Откуда следует, что при $a < \sqrt{2}$ неравенство $q_1 > p_1 - 1$ выполняется, и, следовательно, $O^{*}_{1/2}(0,\pi)$, $O^{**}_{1/2}(\pi,\pi)$ – обратные «седла» (или обратные неориентируемые «седла»). Если $|a| < \sqrt{2}$, то условие $(a-b)^2 < 4 - a^2$ равносильно неравенству $a - \sqrt{4-a^2} < b < a + \sqrt{4-a^2}$. Откуда следует, что при $|a| < \sqrt{2}$ неравенство $q_1 > p_1 - 1$ выполняется, и, следовательно, $O^{*}_{1/2}(0,\pi)$, $O^{**}_{1/2}(\pi,\pi)$ – обратные «седла» (или обратные неориентируемые «седла»).

Случай $cos\,x = -1$, $cos\,\overline{x} = 1$ идентичен рассмотренному.

Рассмотрим условия устойчивости неподвижных точек $O^{*}_{1/2}(x^{*},y^{*})$, $O^{**}_{1/2}(x^{**},y^{**})$, $O^{*}_{0/2}(x^{*}_{0/2},y^{*}_{0/2})$, $O^{**}_{0/2}(x^{**}_{0/2},y^{**}_{0/2})$, координаты которых определяются системами (2) и (3).

Для координат этих точек справедливо равенство $\cos x = cos\,\overline{x}$. Характеристическое уравнение имеет вид: $\lambda^2 + p_1\lambda + q_1 = 0$,

где $\begin{cases} p_1 = 2(a+b)\cdot cos\,x - a^2\,cos^2\,x - 2 \\ q_1 = (1-(a-b)\,cos\,x)^2 \end{cases}$.

Вычисляя величину $\Delta = q_1 + p_1 + 1$, получим $(1-(a-b)\,cos\,x)^2 + 2(a+b)\cdot cos\,x - a^2\,cos^2\,x - 2 + 1 = 4b\,cos\,x - b\cdot cos^2\,x\cdot(2a-b)$. Пусть $0 < b < a$, тогда $b\cdot cos^2\,x\cdot(2a-b) > 0$. И если $cos\,x < 0$, то $q_1 < -p_1 - 1$, неподвижные точки $O^{*}_{1/2}(x^{*},y^{*})$, $O^{**}_{1/2}(x^{**},y^{**})$ являются гиперболическими. При $b < 2(a-\pi)$ для координат точек $O^{*}_{0/2}(x^{*}_{0/2},y^{*}_{0/2})$, $O^{**}_{0/2}(x^{**}_{0/2},y^{**}_{0/2})$ выполняется неравенство $cos\,x < 0$ (действительно, решая уравнение $cos\,x = 0$, или $b\,sin\,x = 2b\pi/(2a-b)$, получим $b = 2(a-\pi)$). Значит, при $b < 2(a-\pi)$ точки $O^{*}_{0/2}(x^{*}_{0/2},y^{*}_{0/2})$, $O^{**}_{0/2}(x^{**}_{0/2},y^{**}_{0/2})$ являются гиперболическими.

Рассмотрим условие $q_1 < -p_1 - 1$ для случая $cos\,x > 0$. Поскольку $\Delta = b\,cos\,x\,(4-(2a-b)\cdot cos\,x)$, то для выполнения условия $\Delta > 0$ необходимо

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

выполнения неравенства $(4-(2a-b)\cdot cos\,x<0$ или $cos\,x<4/(2a-b)$. Итак, $q_1<-p_1-1$, если $cos\,x>4/(2a-b)$ или $cos\,x<0$; и $q_1>-p_1-1$, если $0<cos\,x<4/(2a-b)$.

Осталось рассмотреть условия $q_1<1$ и $q_1>p_1-1$ в предположении $2(a-\pi)<b<2(a-2)$ для неподвижных точек $O_{0/2}^{*}(x_{0/2}^{*},y_{0/2}^{*})$, $O_{0/2}^{**}(x_{0/2}^{**},y_{0/2}^{**})$.

При $2(a-\pi)<b$, когда $cos\,x>0$, и при $a>b$ выполняется неравенство $1-(a-b)\,cos\,x<1$, и, следовательно, $q_1<1$.

Рассмотрим разность $\Delta_1=\ q_1-p_1+1=\ (2-a\,cos\,x)^2+(a-b)^2\,cos^2\,x$. Очевидно, что $q_1>p_1-1$.

Следствие 1. При переходе через бифуркационную прямую $b=2a-4$ неподвижная точка $O_{0/1}(0{,}0)$ теряет свою устойчивость, и из нее мягко рождается пара неподвижных точек $O_{0/2}^{*}$, $O_{0/2}^{**}$ типа $0/2$.

Следствие 2. Неподвижные точки $O_{0/2}^{*}$, $O_{0/2}^{**}$ типа $0/2$ не имеют бифуркаций удвоения.

Выводы. С физической точки зрения интересной является область параметров $G=\bigcup_{i=7}^{11}g_i$, поскольку именно при этих параметрах существуют колебательные (в том числе, устойчивые и притягивающие) фазовые траектории. Области притяжения этих аттракторов, связанные, в частности [5, с. 36], с наличием или отсутствием гомоклинической структуры точек $U_{q/1}$, существенно влияют на характеристики работы конкретных радиотехнических систем.

Список литературы

1. Аносов Д.В. Динамические системы с гиперболическим поведением. Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления / Д.В. Аносов, В.В. Солодов, 1993. – Т. 66. – С. 9–100.

2. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978.

3. Белых В.Н. Модели дискретных СФС и их исследование / под ред. В.В. Шахгильдяна, Л.Н. Белюстиной. – М.: Радио и связь, 1982. – С. 161–162.

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

4. Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике, изд. 2-е, доп. – М.: Ленанд, 2015.

5. Лебедева Л.В. Аналитические оценки сепаратрисных русел для диссипативного отображения тора // Теоретические и практические аспекты развития современной науки: материалы II международной научно-практической конференции, г. Москва, 30–31 декабря 2011 г. / Науч.-инф. издат. центр «Институт стратегических исследований». – М.: Спецкнига, 2011. – С. 36–44.

6. Леонов Г.А. Математические проблемы теории фазовой синхронизации / Г.А. Леонов, В.Б. Смирнова. – М.: Наука, 2000. – 400 с.

7. D. Dudkowski, S. Jafari, T. Kapitaniak, N.V. Kuznetsov, G.A. Leonov, A. Prasad Hidden attractors in dynamical systems // Physics Reports 637, 1–50, 2016.

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)