Алексеева Валентина Евгеньевна

канд. физ.-мат. наук, доцент

ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный

лесотехнический университет им. С.М. Кирова»

г. Санкт-Петербург

DOI: 10.21661.r-497652

МЕТОДИЧЕСКИЙ АСПЕКТ ИЗУЧЕНИЯ ПОНЯТИЯ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

***Аннотация**: в статье на ряде примеров уравнений с разделяющимися переменными показано, что поиск общего решения при строгом следовании определениям может быть сопряжён с неоправданными трудностями, тогда как описание множества решений в произвольной форме довольно просто.*

***Ключевые слова**: дифференциальные уравнения, общее решение, уравнения с разделяющимися переменными, непродолжаемые решения.*

В технических вузах дифференциальные уравнения преподаются как раздел курса высшей математики, стало быть, в упрощённом изложении. Однако понятие общего решения дифференциального уравнения всегда остаётся в программе, как бы её ни сокращали. Понятие это не такое простое, как кажется на первый взгляд. Недаром в учебной литературе нет единообразия в определениях общего решения. Да и в задачниках в качестве ответов иногда вместо общих решений даются общие интегралы. Поиск общего решения, даже будучи осуществимым, сопряжён в некоторых случаях со значительными трудностями. Кроме того, строгое следование принятым определениям при нахождении общего решения может потребовать дополнительных усилий.

Сказанное не относится к линейным дифференциальным уравнениям, для которых применение понятия общего решения как средства описать множество всех решений чрезвычайно эффективно.

Приведём несколько примеров уравнений с разделяющимися переменными, демонстрирующих суть проблемы. Для большинства рассматриваемых далее дифференциальных уравнений условия теоремы существования и единственности выполняются на всей плоскости XOY, поэтому соответствующие области будут указаны только там, где это необходимо.

Начнём с примеров, обращающих внимание на необходимость следить за областью определения функций при вычислении неопределённых интегралов, а также при переходе от неявного задания функций к явному.

В первом примере используется неопределённый интеграл, который, если речь идёт о технике интегрирования, безусловно, относится к разряду «берущихся», $\int \frac{1}{1+\cos^2 x}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C$. Но при решении дифференциального уравнения $y' = \frac{1}{1+\cos^2 x}$ результат $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C$ неприемлем, так как в процессе вычисления интеграла произошло сужение области допустимых значений переменной x. Поэтому первообразную $F(x)$ для функции $\frac{1}{1+\cos^2 x}$ придётся «сконструировать» особо, а именно,

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + k\frac{\pi}{2}, \; \text{если } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in Z; \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + k\frac{\pi}{2}, \; \text{если } -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z. \end{cases}$$

Функция $F(x)$ интересна сама по себе как пример непериодической функции с периодической производной. Применим её для решения следующего дифференциального уравнения.

Пример №1. $y' = 1 + \cos^2 y$.

Разрешим относительно y уравнение $F(y) = x + C$, полученное путём разделения переменных и последующего интегрирования.

$$y = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad если \quad x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi - C\right),\ k \in Z; \\ \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}\left(\sqrt{2}x + C\right)\right) + k\pi, \quad если \quad \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi - C\right) < x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi - C\right). \end{cases}$$

Найдём значение C_0, отвечающее начальным данным (x_0, y_0). Если y_0 при некотором целом k удовлетворяет неравенству $-\frac{\pi}{2} + k\pi < y_0 < \frac{\pi}{2} + k\pi$, то $C_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg} y_0\right) + k\pi - \sqrt{2}x_0$. Если же $y_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, то $C = \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + k\frac{\pi}{2} - x_0\right)$.

В следующем примере проблем с вычислением интегралов не возникает, но переход от общего интеграла к общему решению, выполненный формально, приводит к функции двух переменных, естественная область определения которой шире области определения общего решения.

Пример №2. $y' = \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

В области $G = \{(x,\ y) \mid x \in (-1, 1),\ y \in (-1, 1)\}$ выполняются условия теоремы существования и единственности. Будем считать, что точка $(x,\ y) \in G$.

Стандартные действия приводят к уравнению $\arcsin y = \arcsin x + C$, которое при каждом $C \in (-\pi, \pi)$ неявно задаёт функцию $y = \sin(\arcsin x + C)$, при условии $-\frac{\pi}{2} < \arcsin x + C < \frac{\pi}{2}$. Последнее двойное неравенство равносильно условию: если $C > 0$, то $x < \cos C$, если $C < 0$, то $x > -\cos C$.

Таким образом, общим решением исходного дифференциального уравнения является функция двух переменных или, в другой форме, $y = x\cos C + \sqrt{1-x^2}\sin C$, определённая на множестве $D = \{(x, C) \mid C \in (-\pi, \pi),\ x \in (-1, \cos C)\ при\ C \ge 0,\ x \in (-\cos C, 1)\ при\ C < 0\}$, тогда как функция двух переменных $y = x\cos C + \sqrt{1-x^2}\sin C$, определённая в области допустимых значений выражения $x\cos C + \sqrt{1-x^2}\sin C$, не может служить общим решением исходного уравнения, даже если считать, что $C \in (-\pi, \pi)$.

Однозначная разрешимость уравнения $y_0 = x_0 \cos C + \sqrt{1 - x_0^2} \sin C$ или, что то же самое, $y_0 = \sin(\arcsin\ x_0 + C)$, относительно C следует из того, что на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ функция синус имеет обратную функцию – арксинус.

Далее рассмотрим примеры, связанные с использованием понятия общего решения как средства описать совокупность решений дифференциального уравнения, сделав предварительно несколько замечаний общего характера.

При решении любого уравнения ставится задача найти все его решения. Но что значит «все решения», если речь идёт о дифференциальном уравнении? Должно ли общее решение содержать все решения дифференциального уравнения? Если нет, то почему оно называется общим? Нельзя ли дать определения таким образом, чтобы общее решение содержало все решения дифференциального уравнения?

Эти вопросы могут возникнуть даже по отношению к простейшему уравнению $y' = 2x$, имеющему, очевидно, общее решение $y = x^2 + C$.

Следует ли считать, например, функцию $y = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{если} \ \ x \in (0, 1); \\ x^2 + 2, & \text{если} \ \ x \in (2, 3) \end{cases}$ решением уравнения $y' = 2x$? Если да, то придётся признать, что это решение не входит в общее. Чтобы исключить из рассмотрения искусственные построения такого рода, договоримся считать решениями дифференциального уравнения только функции, определённые на интервалах.

Говоря обо всех решениях дифференциального уравнения, нужно определиться с тем, считать ли «самостоятельными» решениями сужения других решений? Принятые варианты определения общего решения не позволяют включать в него сужения частных решений. Например, функция $y = x^2 + 1$, определённая на интервале $(0, 1)$ и являющаяся сужением функции $y = x^2 + 1$, не получается из формулы $y = x^2 + C$, хотя обращает уравнение $y' = 2x$ в тождество.

Эту проблему можно решить, следуя Понтрягину [1], который предлагает рассматривать только непродолжаемые решения, поскольку в условиях теоремы существования и единственности «каждое решение может быть продолжено до непродолжаемого и притом единственным способом».

Доказательство справедливости последнего утверждения, как и доказательство самой теоремы существования и единственности, в рамках курса высшей математики позволительно опустить, а определение непродолжаемого решения вряд ли усложнит программу.

Разумно также под интегральными кривыми понимать графики именно непродолжаемых решений. Тогда заключение теоремы существования и единственности приобретёт особенно простой и наглядный вид: через каждую точку области, в которой выполнены условия этой теоремы, проходит единственная интегральная кривая. Иными словами, если под решениями дифференциальных уравнений понимать только непродолжаемые решения, то можно сказать, что в условиях теоремы существования и единственности два решения, удовлетворяющие одинаковым начальным данным, совпадают и, следовательно, общее решение содержит все решения. При таком подходе к определению решения дифференциального уравнения понятие общего решения служит инструментом для описания множества всех решений.

Как известно, общее решение далеко не всегда можно найти. Но и в тех ситуациях, когда это возможно, поиск общего решения может оказаться настолько трудоёмким, что имеет смысл описывать множество всех решений, не используя это понятие в строгом смысле.

Прежде чем перейти к примерам, подтверждающим эту мысль, напомним основные моменты определения общего решения.

Обычно общим решением называют семейство функций, задаваемое функцией двух переменных $y=\varphi(x,C)$, или саму эту функцию. Практически в любом варианте определения требуется, чтобы при любом (допустимом) значении C, функция $y=\varphi(x,C)$ являлась решением (в частности, была определена на интервале). Таким образом, каждому C отвечает только одно решение. Кроме того, уравнение $y_0=\varphi(x_0,C)$ должно быть единственным образом разрешимо относительно C (при условии, что точка (x_0, y_0) принадлежит области, в которой выполнены условия теоремы существования и единственности).

Пример №3. $y' = -y^2$.

Стандартные действия приводят к результату: либо $y = 0$, либо $y = \dfrac{1}{x+C}$.

Функция двух переменных $y = \dfrac{1}{x+C}$ не является общим решением. Во-первых, при каждом фиксированном C получаются не одно, а два решения: $y = \dfrac{1}{x+C}$, $x > -C$; $y = \dfrac{1}{x+C}$, $x < -C$. Во-вторых, уравнение $y_0 = \dfrac{1}{x_0+C}$ неразрешимо, если $y_0 = 0$.

Функцию двух переменных $y = \dfrac{1}{x+C}$ можно было бы объявить общим решением уравнения $y' = -y^2$, если отказаться от требования считать областью определения решения интервал и разрешить (как это делает Матвеев [2]) полагать C равным ∞. Но тогда, во-первых, наряду с решением $y = \dfrac{1}{x+1}$, можно будет рассматривать, например, решение $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1}, & \text{если } x \in (-\infty, -1); \\ \dfrac{1}{x-1}, & \text{если } x \in (1, +\infty), \end{cases}$ которое, очевидно, не входит в общее ни при каком C.

Во-вторых, позволив считать, что решение $y = 0$ получается из функции $y = \dfrac{1}{x+C}$ при $C = \infty$, придётся признать, что произвольной постоянной разрешается придавать и другие значения, не входящие в область допустимых, например, включить решение $y = 0$ в формулу $y = \dfrac{1}{x + \operatorname{tg} C}$, положив $C = \dfrac{\pi}{2}$. Всё это потребует пояснений и уточнения определений.

Общим решением уравнения $y' = -y^2$ может служить следующая функция двух переменных: $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x + \operatorname{tg} C}, x \in (-\operatorname{tg} C, +\infty), \textit{если } C \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right); \\ 0, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad \textit{если } C = \dfrac{\pi}{2}; \\ \dfrac{1}{x + \operatorname{tg} C}, x \in (-\infty, -\operatorname{tg} C), \textit{если } C \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right). \end{cases}$

Для любой точки (x_0, y_0) значение постоянной C находится однозначно. Если $y_0 > 0$, то $C = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{y_0} - x_0\right)$; если $y_0 = 0$, то $C = \dfrac{\pi}{2}$; если $y_0 < 0$, $C = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{y_0} - x_0\right) + \pi$.

Пример №4. $y' = \dfrac{x}{y}$.

В полуплоскости $y > 0$ выполнены условия теоремы существования и единственности. Все решения уравнения описываются формулой $y = \sqrt{x^2 + C}$. Но функция $y = \sqrt{x^2 + C}$ не является общим решением, так как при фиксированном значении $C < 0$ получается два решения: одно определено на интервале $(-\infty, \sqrt{-C})$, другое – на интервале $(\sqrt{-C}, +\infty)$.

Настоящее общее решение выглядит сложнее:

$$y = \varphi\,(x, C) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + C}, x \in (-\infty. +\infty), \textit{если } C > 0; \\ x, x \in (0. +\infty), \textit{если } C = 0; \\ \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{C} + 1}, x \in (-\infty. -\sqrt{-\dfrac{1}{C} - 1}), \textit{если } -1 \le C < 0; \\ \sqrt{x^2 + C + 1}, x \in (\sqrt{-C - 1}. +\infty), \textit{если } -\infty < C < -1. \end{cases}$$

Уравнение $y_0 = \varphi(x_0, C)$ однозначно разрешимо: $C = 0$, если $y_0 = x_0$; $C = y_0^2 - x_0^2$, если $y_0 > x_0 \ge 0$ или $y_0 > -x_0 > 0$; $C = \dfrac{1}{y_0^2 - x_0^2 - 1}$, если $y_0 \le -x_0$; $C = y_0^2 - x_0^2 - 1$, если $y_0 < x_0$.

Пример №5. $y' = -y^2 \cos x$ (этот пример заимствован у Понтрягина [1]).

Все решения этого уравнения описываются двумя формулами: $y = 0$ и $y = \dfrac{1}{\sin x + C}$. При каждом значении C, удовлетворяющем неравенству $|C| \le 1$, получается счётное число решений.

Общее решение выглядит ещё сложнее, чем в предыдущем примере. Если $C = \dfrac{\pi}{2}$, $y = 0$. Для остальных значений C $y = \dfrac{1}{\sin x + \operatorname{tg} C}$, но при разных значениях постоянной C берутся разные интервалы изменения переменной x.

Если $C \in \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4} \right)$, то $x \in (-\infty, +\infty)$.

Если $C = \pm \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ (здесь и далее $k \in Z$), то $x \in (2k\pi \mp \dfrac{\pi}{2}, 2k\pi + 2\pi \mp \dfrac{\pi}{2})$.

Если $C \in \left(-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \right)$, то $x \in (2k\pi - \alpha, 2k\pi + \pi + \alpha)$ (здесь и далее $\alpha = \arcsin \operatorname{tg} C$).

Если $C \in \left(-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi + \pi, \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi + \pi \right)$, то $x \in (2k\pi + \pi + \alpha, 2k\pi + 2\pi - \alpha)$.

Уравнение $y_0 = \varphi(x_0, C)$ однозначно разрешимо. Если $y_0 = 0$, то $C = \dfrac{\pi}{2}$.

Если $\dfrac{1}{y_0} - \sin x_0 > 1$, то $C = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{y_0} - \sin x_0 \right)$. Если $\dfrac{1}{y_0} - \sin x_0 < -1$, то $C = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{y_0} - \sin x_0 \right) + \pi$. Если $\dfrac{1}{y_0} - \sin x_0 = 1$ и $x_0 \in (-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi)$, то $C = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$. Если $\dfrac{1}{y_0} - \sin x_0 = -1$ и $x_0 \in (+\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{2} + 2k\pi)$, то $C = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$.

Если $\dfrac{1}{y_0} - \sin x_0 = 0$ и $x_0 \in (k\pi, k\pi + \pi)$, то $C = k\pi$.

Если $0<\left|\frac{1}{y_0}-\sin x_0\right|<1$ и $x_0\in(-\beta+2k\pi,\beta+2k\pi+\pi)$ (здесь и далее $\beta=\arcsin\left(\frac{1}{y_0}-\sin x_0\right)$), $C=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{y_0}-\sin x_0\right)+2k\pi$, если же $x_0\in(\beta+2k\pi+\pi,-\beta+2k\pi+2\pi)$, то $C=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{y_0}-\sin x_0\right)+2k\pi+\pi$.

Пример №6. $y'=\frac{1}{2}y(y^2-1)$

Все решения уравнения, за исключением $y=0$, содержатся в формуле $y=\pm\frac{1}{\sqrt{1+Ce^x}}$. Последняя формула не является общим решением не только потому, что содержит не все решения, но и потому, что представляет не одну, а две функции двух переменных.

Общее решение выглядит гораздо сложнее. Чтобы его получить, нужно взять за новую произвольную постоянную $\tilde{C}$ ординату точек пересечения интегральных кривых с осью OY для неотрицательных C и с графиками функций $y=e^{-\frac{x}{2}}$ и $y=-e^{-\frac{x}{2}}$ для C отрицательных.

$$y=\varphi(x,\tilde{C})=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1+(1-\tilde{C}^2)e^x}},\ x\in(-\infty,-\ln(\tilde{C}^2-1)),\ если\ \tilde{C}>1;\\ \dfrac{\tilde{C}}{\sqrt{\tilde{C}^2+(1-\tilde{C}^2)e^x}},\ x\in(-\infty,+\infty),\quad если\ |\tilde{C}|\le 1;\\ -\dfrac{1}{\sqrt{1+(1-\tilde{C}^2)e^x}},\ x\in(-\infty,-\ln(\tilde{C}^2-1)),\ если\ \tilde{C}<-1.\end{cases}$$

Уравнение $y_0=\varphi(x_0,\tilde{C})$ однозначно разрешимо относительно $\tilde{C}$. Если $|y_0|\le 1$, $\tilde{C}=\frac{y_0e^{\frac{x_0}{2}}}{\sqrt{1-y_0^2+y_0^2e^{x_0}}}$. Если $|y_0|>1$, $\tilde{C}=\frac{\sqrt{y_0^2-1+y_0^2e^{x_0}}}{y_0e^{\frac{x_0}{2}}}$.

Пример №7. $y'=\cos^2 y$.

Разделив переменные и проинтегрировав полученное равенство, будем иметь: $\operatorname{tg} y = x + C$. Очевидно, что множество всех решений исходного уравнения даётся формулами: $y = \operatorname{arctg}(x+C) + k\pi$, $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$.

Функция $y = \operatorname{arctg}(x+C) + k\pi$ является функцией трёх переменных и уже поэтому не может служить общим решением уравнения.

Общее решение можно записать следующим образом:

$$y = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x+C) + k\pi, \text{ } \textit{если } -\frac{\pi}{2} + k\pi < C < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z; \\ C, \quad \textit{если } C = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z. \end{cases}$$

Для любой точки (x_0, y_0) однозначно находится C. Если $y_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, то $C = y_0$. Если $y_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $C = \operatorname{tg} y_0 - x_0$.

Пример №8. $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$.

Разрешая общий интеграл этого уравнения, $\operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} x + C$, относительно y, после преобразований получим функцию $y = \frac{x+C}{1-Cx}$, которая не может служить общим решением, так как не содержит решение $y = -\frac{1}{x}$.

В качестве общего решения можно взять функцию

$$y = \varphi(x, C) = \begin{cases} \frac{x\cos C + \sin C}{\cos C - x\sin C}, x \in (\operatorname{ctg} C, +\infty), \textit{если } C \in (-\pi, 0); \\ y = x, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad \textit{если } C = 0; \\ \frac{x\cos C + \sin C}{\cos C - x\sin C}, x \in (-\infty, \operatorname{ctg} C), \textit{если } C \in (0, \pi). \end{cases}$$

Для любой точки (x_0, y_0) уравнение $y_0 = \varphi(x_0, C)$ имеет единственное решение: $C_0 = \frac{\pi}{2}$, если $x_0 y_0 = -1$ и $x_0 < y_0$; $C = -\frac{\pi}{2}$, если $x_0 y_0 = -1$ и $x_0 > y_0$;

$C = \operatorname{arctg}\dfrac{y_0 - x_0}{1 + x_0 y_0}$, если $x_0 y_0 > -1$; $C_0 = \operatorname{arctg}\dfrac{y_0 - x_0}{1 + x_0 y_0} - \pi$, если $x_0 y_0 < -1$ и $x_0 > y_0$;

$C_0 = \operatorname{arctg}\dfrac{y_0 - x_0}{1 + x_0 y_0} + \pi$, если $x_0 y_0 < -1$ и $x_0 < y_0$.

Рассмотренные выше примеры показывают, что в некоторых случаях описание множества всех решений дифференциального уравнения не вызывает затруднений, тогда как поиск общего решения занимает много времени. По сути дела, найти общее решение — значит установить взаимно однозначное соответствие между множеством интегральных кривых и множеством допустимых значений произвольной постоянной. Если цель – просто найти все решения, последнюю задачу выполнять вовсе не обязательно.

С методической точки зрения интересна позиция Понтрягина [1], который практически не использует понятие общего решения. Так, рассматривая уравнение $y' = -y^2 \cos x$, он говорит, что формулы $y = 0$ и $y = \dfrac{1}{\sin x + C}$ «охватывают совокупность всех решений» этого уравнений. Термин «общее решение» появляется у Понтрягина на сорок четвёртой странице текста в главе о линейных уравнениях.

Каждому преподавателю высшей математики приходится решать вопрос о том, какой вариант определения общего решения выбрать, с учётом конкретной учебной ситуации. Некоторые авторы [3] ограничиваются одним требованием к функции $y = \varphi\,(x, C)$, призванной служить общим решением, – при любом значении произвольной постоянной должно получаться решение дифференциального уравнения. В любом случае при подготовке к практическим занятиям следует иметь в виду, что применение принятого определения общего решения даже к простому на вид уравнению может оказаться достаточно трудоёмким.

Список литературы

1. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1970. – 332 с.

2. Матвеев Н.М. Дифференциальные уравнения. – М.: Просвещение, 1988. – 256 с.

3. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. – СПб.: Лань, 1999. – 736 с.