

Майбах Елена Александровна

студентка

ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет

им. первого Президента России Б.Н. Ельцина»

г. Екатеринбург, Свердловская область

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТА ЗУБЬЕВ

Аннотация: в статье приводится описание математической модели зацепления зубьев в цилиндрических передачах Новикова с учетом их погрешностей.

Ключевые слова: зубчатое зацепление, матричный метод, математическое моделирование.

Производящая поверхность p_i зубчатой рейки описывается [1] матрицей:

$$\tilde{r}_{pi} = \begin{bmatrix} u_i \\ \rho_{li} \cos \vartheta_{li} + a_{li} \pm j\pi m_n + \delta_{tij} \\ \rho_{li} \sin \vartheta_{li} + b_{li} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где u_i, ϑ_{li} – параметры производящей поверхности зубчатой рейки,

$i = 1, 2$ – индекс зубчатого колеса и соответствующей производящей рейки,

$j = \pm 1, \pm 2, \dots$ – порядковый номер зуба, l – индекс участка исходного контура,

$a_{li} = a_l + \delta_{ali}, b_{li} = b_l + \delta_{bli}, \rho_{li} = \rho_l + \delta_{rali}, a_l, b_l, \rho_l$ – номинальные координаты центра кривизны и радиус кривизны l -го участка исходного контура,

δ_{tij} – накопленная погрешность нормального шага для j -го зуба.

Верхние знаки в выражении (1) и дальше соответствуют $i=1$, нижние – $i=2$.

Из (1) выводим орт нормали к производящей поверхности в виде матрицы:

$$\tilde{e}_{pi} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos \vartheta_{l_i} \\ -\sin \vartheta_{l_i} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

Поверхности зубьев колёс ($i = 1, 2$) являются огибающими однопараметрического семейства производящих поверхностей и описываются [1] в виде:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{r}_i &= \tilde{A}_i(\psi_i) \cdot \tilde{r}_{pi}(u_i, \vartheta_i), \\ \tilde{e}_i &= \tilde{A}_i(\psi_i) \cdot \tilde{e}_{pi}(u_i, \vartheta_i), \\ f_i(u_i, \vartheta_i, \psi_i) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $\tilde{r}_i, \tilde{e}_i$ – матрицы радиус-вектора и орта нормали поверхности зуба колеса, $\tilde{A}_i(\psi_i)$ – матрица перехода, описывающая относительное движение (с параметром ψ_i) производящей поверхности рейки и зубчатого колеса,

$f_i(u_i, \vartheta_i, \psi_i) = 0$ – уравнение зацепления, связывающее параметры u_i, ϑ_i и угол

ψ_i поворота колеса в станочном зацеплении,

$\tilde{r}_{pi}, \tilde{e}_{pi}$ – матрицы радиус-вектора и орта нормали производящей поверхности в системе координат S_{pi} .

Используя переходы между системами координат в станочных зацеплениях для цилиндрических зубчатых колёс Новикова с учётом их погрешностей, получим выражение для матрицы перехода от системы S_{pi} к S_i :

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} \mp \sin \beta_i \cos \psi_i & \cos \beta_i \cos \psi_i & \mp \sin \psi_i \pm [r_i \psi_i \cos \psi_i - (r_i + \Delta h_i) \sin \psi_i] \\ -\sin \beta_i \sin \psi_i & \pm \cos \beta_i \sin \psi_i & \cos \psi_i & r_i \psi_i \sin \psi_i + (r_i + \Delta h_i) \cos \psi_i \\ \cos \beta_i & \pm \sin \beta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где $\beta_i = \beta + \delta_{\beta i}$, $\Delta h_i = x_i m_n + \delta_{h i}$,

ψ_i – угол поворота зубчатого колеса в станочном зацеплении (параметр относительного движения производящей поверхности рейки и колеса),

r_i – радиус делительной окружности зубчатого колеса,

β – номинальный угол наклона линии зуба,

x_i – коэффициент смещения исходного контура, m_n – модуль нормальный,

$\delta_{\beta i}, \delta_{h i}$ – погрешности соответственно угла наклона и смещения исходного контура.

Уравнение зацепления получим кинематическим методом [1] способом [2]:

$$u_i \sin \beta_i - r_i \psi_i \pm (b_{li} + \Delta h_i) \cos \beta_i \operatorname{ctg} \vartheta_{li} \mp (a_{li} \pm j \pi m_n + \delta_{tij}) \cos \beta_i = 0, \quad (5)$$

Отсюда имеем выражение для параметра ψ_i :

$$\psi_i = \left\{ u_i \sin \beta_i \mp \cos \beta_i \left[a_{li} \pm j \pi m_n + \delta_{tij} - (b_{li} + \Delta h_i) \operatorname{ctg} \vartheta_{li} \right] \right\} / r_i, \quad (6)$$

Выражения (1) ... (6) дают математическую модель поверхностей зубьев цилиндрических колёс Новикова при наличии погрешностей их изготовления.

Точки касания поверхностей зубьев в передаче определяются решением известной [1] системы уравнений, выражающей равенство радиус-векторов и ортов нормалей поверхностей зубьев колёс 1 и 2 в общей системе координат S:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{M}_1(\varphi_1) \cdot \tilde{r}_1 &= \tilde{L} \cdot \tilde{M}_2(\varphi_2) \cdot \tilde{r}_2, \\ \tilde{M}_1(\varphi_1) \cdot \tilde{e}_1 &= \tilde{L} \cdot \tilde{M}_2(\varphi_2) \cdot \tilde{e}_2, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$\tilde{L}$ – матрица перехода, описывающая переход между осями зубчатых колёс.

Определяем элементы матрицы $\tilde{M}$ с учетом возможного эксцентриситета:

$$\tilde{A}_i = \left\| \begin{array}{cccc} \cos \varphi_i & \pm \sin \varphi_i & 0 & l_i \sin \gamma_i \\ \pm \sin \varphi_i & \cos \varphi_i & 0 & l_i \cos \gamma_i \\ \cos \beta_i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|, \quad (8)$$

где φ_i – угол поворота зубчатого колеса вокруг своей оси вращения,

l_i, γ_i – эксцентриситет зубчатого венца и фазовый угол эксцентриситета.

Система матричных уравнений (7) эквивалентна системе из 5 независимых скалярных уравнений, которую надо решать относительно 5-ти параметров

$u_1, \vartheta_1, u_2, \vartheta_2, \varphi_2$ (соответствующих точке касания зубьев) при фиксированном значении параметра φ_1 и погрешностей изготовления зубчатой передачи. Трудности решения обусловлены трансцендентностью уравнений системы.

Список литературы

1. Литвин Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений / Ф.Л. Литвин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1968. – 584 с.
2. Ерихов М.Л. Теория зубчатых зацеплений / М.Л. Ерихов // Теория передач в машинах: сб. статей. – М.: Машиностроение, 1966. – С. 78–91.