Какорин Александр Васильевич
студент
Научный руководитель
Гречко Галина Александровна
старший преподаватель
ФГБОУ ВО «Донской государственный
технический университет»
г. Ростов-на-Дону, Ростовская область

DOI 10.21661/r-529545

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОДАЧИ ВОЛЕЙБОЛЬНОГО МЯЧА

***Аннотация**: подачи волейбольного мяча можно разделить на силовые, планирующие и навесные. Достижения силовой подачи характеризуются высокой начальной скоростью, подачи планирующего типа характеризуются нерегулярным движением мяча, и целью продвижения является посадка мяча на стороне ближайшего противника, возможно и в сеть. В литературе нет теоретического анализа этих подач. В статье исследуются силовая и навесная подачи.*

***Ключевые слова**: математическое моделирование, волейбольный мяч, подача, оптимальная траектория.*

Механизм нерегулярности движения мяча при планирующей подаче пока не изучен. В первой части работы рассмотрены методы определения скорости мяча по высоте отскока и его деформации при ударе. Для волейболистов первого разряда эта скорость оказалась несколько меньше 20 м/с. Далее приводятся дифференциальные уравнения движения волейбольного мяча как материальной точки и разностные уравнения, которые решались численно. Анализ траекторий показал, что наиболее эффективна силовая подача из ближней зоны. При подаче с линии площадки на высоте 2.5 м при скорости мяча 22.8 м/с он приземляется на стороне соперника со скоростью 13.5 м/с. В навесной подаче при высоте зала 6 м оптимальная траектория получена при начальной скорости 12 м/с, угле вылета мяча 55°. Мяч приземляется в 2.5 м от сетки на стороне соперника.

Математические и физические методы все шире используются в спорте. Остается актуальной проблема выстраивания правильной тактики в волейболе при подаче мяча. На движение мяча в среде влияют скорость, сила тяжести, угол подачи способная изменить направление движения мяча. Проблема исследования заключается в том, что многие вопросы, касающиеся подготовки волейболистов и игровой тактики, еще не полностью изучены. Снижение показателей в этом виде спорта указывает на необходимость поиска эффективных методов и нахождения точек взаимодействия с наукой. Эти причины, среди прочего, послужили причиной выбора этого предмета.

Объект исследования: волейбол.

Предмет исследования: математическая модель полета мяча.

Цель: построить модель полета мяча, оптимизировать траекторию.

Для достижения этой цели необходимо решить следующие задачи: изучить литературу по предмету; систематизировать и обобщать знания об отношениях между математикой и волейболом; привести примеры использования математики и физики в волейболе; показать важность и значимость этих отношений на данном этапе развития нашего общества. Чтобы решить проблему, гипотеза исследования заключалась в следующем: эффективность игры в волейбол будет выше для команды, игроки которой отбираются в соответствии с научными критериями.

В работе использованы следующие методы исследования: изучение литературы; наблюдение; анализ и синтез; обобщение собранного материала.

Определение максимальной скорости подачи мяча

В волейболе скорость мяча не записывается, поэтому нам нужны простые и надежные методы определения скорости мяча без использования специального оборудования. Такие методы были разработаны и опробованы на базе волейбольной команды Пермского государственного технического университета.

Во-первых, экспериментально был определен коэффициент восстановления скорости волейбола с прямым центральным воздействием на деревянный пол. Мяч свободно падал с высоты H и отскакивал от препятствия на высоту h. Известная формула коэффициента восстановления $k = \sqrt{h/H}$ для волейбольного мяча падение с высоты нескольких метров недопустимо, поскольку аэродинамические силы сопротивления оказывают существенное влияние на движение мяча. Когда мяч падает с высоты H, его конечная скорость определяется по формуле

$$v = \frac{1}{f}\sqrt{1\text{-}e^{\text{-}2gHf^2}} \tag{1}$$

и таким же образом скорость определяется после отскока по высоте шара h:

$$u = \frac{1}{f}\sqrt{e^{\text{-}2gHf^2}\text{-}1} \tag{2}$$

$$f = \sqrt{\frac{c_x pS}{2mg}} \tag{3}$$

где p – плотность воздуха, S – площадь миделя шара ($S = \pi R^2$), m – масса мяча, g – ускорение свободного падения, cx – аэродинамический коэффициент лобового сопротивления движению мяча.

Коэффициент восстановления – это скорость после удара и скорость до удара:

$$k = \frac{u}{v} = \sqrt{\frac{e^{2ghf^2}}{1\text{-}e^{\text{-}2gHf^2}}} \tag{4}$$

В проведенных экспериментах максимальная высота выброса составляла 9 м. Расчетная скорость снижения с этой высоты составляла V = 11,5 м / с, а коэффициент восстановления k = 0,75. При увеличении скорости значение коэффициента k несколько уменьшается, и путем экстраполяции при v = 20 м / с было получено значение k = 0,65, которое используется для оценки максимальной начальной скорости шара.

Значение k позволяет оценить скорость мяча по высоте отражения h от горизонтального препятствия

$$v = \frac{u}{k} = \frac{1}{kf}\sqrt{e^{2ghf^2}\text{-}1} \tag{5}$$

При p = 1.3 кг/м3, R = 0.105 м, m = 0.27 кг, g = 9.8 м/с2, k =0.65 и при максимальной высоте отскока h = 6 м, полученной экспериментально, формула (5) с учетом (2), (3) дает скорость v =18.7 м/с.

Второй способ определить скорость мяча – это определить его деформацию при столкновении с препятствием. Лист белой бумаги размещается на полу, под которым помещается копировальная бумага. Деформация шара sk зависит от диаметра пятна dk (рис. 1). В расчетах мы пренебрегаем изменением массы движущейся части шара и изменением давления внутри шара при ударе. Теорема применяется к изменению кинетической энергии материальной точки в фазах торможения и восстановления формы. Так как мяч останавливается в конце первого этапа, мы имеем:

$$\text{-}m\frac{{V_0}^2}{2} = \text{-}A_1\text{-}A_2;\ m\frac{U^2}{2} = A_2\text{-}A_1 \tag{6}$$

где m – масса мяча, V0 – скорость до удара, U – скорость после удара, A1 и A2 – абсолютные значения работы упругих сил и неупругих сил соответственно.

Работа сил упругости определяется работой сил избыточного давления воздуха на шарике и не зависит от фазы удара. Также предполагается, что потери мощности A2 одинаковы в обеих фазах.

Из уравнений (6), учитывая, что U = kV, получаем

$$V_0 = \sqrt{\frac{4A_1}{m(1+k^2}} \tag{7}$$

Значение силы упругости, действующей на шар, равно избыточному давлению

Внутри шара p-раз поверхность контакта с препятствием

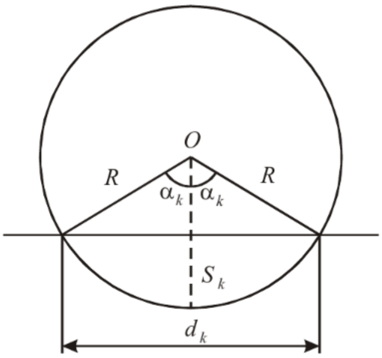

Рис. 1. Деформация мяча при ударе о преграду

$$F = p\pi \frac{d^4}{4} \tag{8}$$

где d – диаметр круга, изменяющийся от 0 до dk.

Работа упругой силы

$$A_1 = \int_0^{S_k} FdS \tag{9}$$

Выражая переменные через угол а и интегрируя мы получим:

$$A = p\pi R^3(\frac{2}{3} - \cos(\alpha_k) + \frac{1}{3}cos^3(\alpha_k)) \tag{10}$$

где R – радиус мяча, а угол αk может быть выражен через диаметр пятна и радиус шара:

$$\alpha_k = \arcsin(\frac{d_k}{2R}) \tag{11}$$

Формулы (7), (10), (11) определяют начальную скорость мяча. Для сетчатки m = 0,27 кг, R = 0,105 м, p = 0,44 × 105 Па. Опыт показывает, что при максимальной силе удара по мячу диаметр пятна составлял dk = 0,17 м. На основании этих значений i для k = 0,65 была получена начальная скорость V0 = 15,6 м / с, что дает немного заниженное значение по сравнению с первым методом, поскольку в расчетах не учитывалось изменение массы движущегося шара и давления в шаре при ударе.

Математическое моделирование движения мяча

Когда шар летит, на него воздействует гравитационная сила p = mg, которая направлена вертикально вниз, и аэродинамическое сопротивление R, которое противоположно воздушной скорости V и пропорционально квадрату скорости: $R = \mu v^2$ где $\mu = \frac{1}{2}pSC_x$ где ρ – плотность среды, S – площадь миделя

(S = πR), C_x – коэффициент аэродинамического сопротивления (для шара 0.45). Давайте направим ось x по горизонтали в направлении движения шара, ось y – вертикально вверх, пусть u, v – проекции вектора скорости V на оси x и y соответственно, и отметим дифференциальные уравнения движение мяча как материальной точки:

$$m\frac{du}{dt} = -\mu Vu;\ u = \frac{dx}{dt};\ m\frac{dv}{dt} = -mg-\mu Vu \qquad (12)$$

$$v = \frac{dy}{dt}$$

$$V = \sqrt{v^2 + u^2}$$

Все время полета разобьем на малые равные интервалы времени Δt и для i-го шага по времени запишем (7) в разностном виде

$$m\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta t} = -\mu V_i u_i$$

$$\frac{x_{i+1}-x_i}{\Delta t} = u_i$$

$$m\frac{v_{i+1}-v_i}{\Delta t} = -mg-\mu V_i v_i \qquad (13)$$

$$\frac{y_i-y_i}{\Delta t} = v_i$$

$$V_i = \sqrt{{v_i}^2 + {u_i}^2}$$

Это явная разностная схема первого порядка точности, которая определяет функции на временном шаге i + 1 по их значениям на i-м шаге. Для i = 0 функции x_i, y_i, u_i, v_i определяются в соответствии с начальными условиями. Расчеты производятся при i = 0,1,2,..., что дает приближенное решение задачи Коши.

Компьютерная оптимизация подачи волейбольного мяча

Оптимизация потока из ближней зоны – от линии поля – вызывает наибольший интерес. При подаче мощности исходная высота шара предполагалась равной 2,5 м, а модуль начальной скорости и угол, сгенерированный вектором начальной скорости шара с горизонтом, принимались в качестве переменных параметров. Мяч должен пролететь над сеткой высотой 2,43 м и упасть на площадку соперника, длина которой составляет 9 м. При оптимальной подаче мяч должен быть на максимальной скорости, прежде чем касаться поля. Оптимизация проводилась путем анализа различных траекторий, отображаемых на экране компьютера, и выбора траектории с максимальной скоростью падения. Максимальная траектория показана на рис. 2. Мяч вводится с начальной скоростью 22,8 м / с, что немного выше средних показателей спортсменов, под углом 7,5 градусов к горизонту. Конечная скорость мяча составляет 13,5 м/с. Еще более эффективен прыжок с игрового поля с более высокой стартовой позицией мяча.

При подаче мяча из удаленной зоны, примерно такие же показатели, как при подаче из ближней зоны, но требуется гораздо более высокая начальная скорость мяча.

Рис. 2. Силовая подача с края площадки

Начальная высота: 2.5 м., начальная скорость: 22.8 м/с., начальный угол: 7.5 град., расстояние от передней линии: 0 м., максимальная высота: 2.9 м., расстояние над сеткой: 0.3 м., время полета: 1.1 с., расстояние до задней линии: 0.2 м., конечная скорость:13.5 м/с.

На рис. 3 показывает оптимальную траекторию для шарнирной подачи. Критерий оптимизации – это минимальное расстояние, на которое мяч падает из сетки. При ограничении высоты траектории (6 м) оптимальная начальная скорость составляет 12 м / с, а угол подачи составляет 55 градусов относительно горизонта. В этом случае мяч приземляется на расстоянии 2,5 м от сетки.

Рис. 3. Навесная подача с края площадки

Начальная высота: 1.5 м., начальная скорость: 12 м/с., начальный угол: 55 град., расстояние от передней линии: 0 м., максимальная высота: 5.5 м., расстояние над сеткой: 0.5 м., время полета: 2 с., расстояние до задней линии: 7.5 м., конечная скорость: 10.4 м/с.

Таким образом, цифровое исследование игрового поля во время игры в волейбол показало, что наиболее эффективна силовая подача из ближней зоны. Понимание механики полета мяча поможет игроку более осознанно совершенствовать технику ударов и быстрее овладеть спортивным мастерством. Таким образом, на нескольких примерах мы показали, как законы полета мяча можно использовать в практике волейболиста.

Список литературы

1. Железняк Ю.Д. Юный волейболист: учеб. пособ. для тренеров. – М.: Физкультура и спорт, 1988. – 192 с.

2. Рудаков Р.Н. Общие теоремы динамики и их приложение к решению задач биомеханики. – Пермь: Пермский государственный технический университет, 1999.