УДК 51.75

DOI 10.21661/r-508346

А.В. Танюхин

ОБ АКТУАРНОМ РАСЧЕТЕ НЕТТО-ПРЕМИИ ПО СТРАХОВОМУ ПОЛИСУ С ФРАНШИЗОЙ

***Аннотация**: данная статья связана с получением методов вычисления нетто-премии по страховому полису с франшизой в страховании ином, чем страхование жизни. В статье раскрыты теоретические основы подобных актуарных расчетов, получены методы вычисления математического ожидания случайной величины убытка страховщика от страхового случая по полису с франшизой при гамма- и логнормальном распределениях случайной величины убытка, изложены методы статистической оценки математического ожидания случайной величины убытка страховщика от страхового случая при наличии франшизы. Полученные методы статистической оценки позволяют производить расчеты нетто-премий на основе исторических данных без вовлечения какого-либо известного вероятностного распределения случайной величины убытка от страхового случая, задаваемого аналитически.*

***Ключевые слова**: страхование, нетто-премия, актуарные расчеты, условная франшиза, безусловная франшиза.*

A.V. Tanyukhin

REVISITING THE ACTUARIAL EXPECTATION OF THE NET-PREMIUM FOR FRANCHISE INSURANCE CERTIFICATE

***Abstract**: this article is related to obtaining methods for calculating the net-premium for franchise insurance certificate without taking into consideration life insurance. The theoretical foundations of such actuarial expectations are revealed, methods for calculating the mathematical expectation of a random value of insurer's loss from an event insured according to the franchise insurance certificate for gamma and logarithmically normal distributions of a random value of losses are presented, methods* *for statistical estimation of the mathematical expectation of a random value of the insurer's loss from an event insured in the presence of franchise insurance certificate are described in the article. The author comes to the conclusion that the obtained statistical estimation methods allow us to calculate net-premiums based on historical data without involving any known probabilistic distribution of a random value of loss from analytically specified event insured.*

Keywords*: insurance, net-premium, actuarial expectations, conditional franchise, deductible franchise.*

Введение

Актуальность работы обусловлена тем, что широко освещенные методы подобных расчетов базируются на известных аналитических решениях в отношении вероятностных распределений убытка, их допускающих (например, распределение Парето). Однако, на сегодняшний день применение для моделирования размера убытка в мировой актуарной практике, наряду с другими, имеют гамма-распределение и логнормальное распределение, методы расчетов с использованием которых не столь очевидны. К тому же актуарию необходимо иметь возможность выполнить статистические расчеты с опорой на теорию риска без использования какого-либо известного теоретического распределения, ведь таковое может быть достаточно сложно подобрать.

Это определило цель работы: получить методы вычисления на основе логнормального распределения и гамма-распределения, которые могут быть использованы актуарием в расчетах нетто-премии по полису с франшизой, а также разработать методы статистической оценки необходимых параметров, участвующих в расчете такой нетто-премии без использования аналитически заданного распределения вероятности.

В первой части рассматриваются теоретические основы актуарных расчетов нетто-премий по полисам с франшизой и приводятся формулы таких расчетов.

Во второй и третьей частях решается основная задача данной работы. В четвертой части уделяется внимание популярному в актуарной литературе, связанной с проблемами деления риска, эффекту освобождения.

Теоретические основы актуарного расчета нетто-премии по полису с франшизой

Пусть размера убытка страховщика – это некая случайная величина. Тогда, нетто-премия по полису без франшизы по принципу эквивалентности равна математическому ожиданию этой величины. Здесь и везде далее принцип эквивалентности будет полагаться лежащим в основе актуарной тарификации по умолчанию.

В теории риска широко используется теоретико-вероятностная модель нетто-премии, в которой последняя вычисляется как произведение математического ожидания числа страховых случаев на математическое ожидание случайной величины размера убытка при условии наступления страхового случая.

Пусть $X_1, X_2, \dots X_N$ – взаимно независимые, одинаково распределенные случайные величины размера убытка при наступлении страхового случая («говорят, что они измеряют «тяжесть» страховых потерь» [1, с. 328]), N – случайная величина количества убытков. Случайная величина убытка по полису определяется формулой (1):

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N \quad (1)$$

Согласно принципу эквивалентности, нетто-премия по полису равна математическому ожиданию S.

В силу одинакового распределения «тяжестей» страховых потерь (взаимная независимость «тяжести» и числа страховых случаев тогда предполагается по умолчанию) справедливо (2):

$$E(S) = E\big(E(S|N)\big) = P_N(N=0)\cdot 0 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} E(X_i|N=n)\cdot P_N(N=n) = E(X)\cdot\sum_{n=1}^{\infty} P_N(N=n)\cdot n = E(X)\cdot E(N) \quad (2)$$

где E – символ математического ожидания, P_N – вероятностная функция случайной величины N, $E(X)$ – математическое ожидание случайной величины X, имеющей такое же распределение, как и любая из величин $X_1, X_2, \dots X_N$.

Принимая во внимание одинаковое распределение «тяжестей» страховых потерь, далее, говоря о величине X в терминах распределений вероятности или моментов, понимаем, что эти выводы справедливы также и для любой из величин $X_1, X_2, \ldots X_N$.

Введение франшизы сказывается на тяжести страховых потерь следующим образом. Размеры убытков при наступлении страховых случаев – это однозначные функции от $X_1, X_2, \ldots X_N$.

Случайная величина убытка страховщика от страхового случая $Y_i, i \in \{1,2,\ldots N\}$ при наличии условной франшизы в размере d равна (3):

$$Y_i = \begin{cases} 0, X_i \le d \\ X_i, X_i > d \end{cases} \tag{3}$$

Случайная величина убытка страховщика $Y_i, i \in \{1,2,\ldots N\}$ при наличии безусловной франшизы в размере d равна (4):

$$Y_i = \begin{cases} 0, X_i \le d, \\ X_i - d, X_i > d. \end{cases} \tag{4}$$

Случайная величина суммарного убытка по полису теперь равна (5):

$$\underline{\underline{S}} = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N \tag{5}$$

Очевидно, что $Y_1, Y_2, \ldots Y_N$ -одинаково распределенные случайные величины.

Аналогично (2) математическое ожидание суммарного убытка по полису таким образом равно (6):

$$E\left(\underline{\underline{S}}\right) = E(Y) \cdot E(N) \tag{6}$$

где $E(Y)$ – математическое ожидание случайной величины Y, имеющей такое же распределение, как и любая из величин $Y_1, Y_2, \ldots Y_N$.

Для дальнейшего рассмотрения необходимо ввести определение и доказать одно утверждение, с ним связанное.

Определение. Пусть X – случайная величина, R – множество действительных чисел, $d \in R, d > 0$. Усеченной случайной величиной будем называть случайную величину:

$$X^d = \begin{cases} X, |X| \le d, \\ 0, |X| > d. \end{cases} \tag{7}$$

■ [3]

Для распределений случайных величин X, принимающих только положительные значения, формула (7) будет иметь вид:

$$X^d = \begin{cases} X, X \le d, \\ 0, X > d. \end{cases} \quad (8)$$

Теорема. Пусть $\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}$ – множество элементарных событий, алгебра событий, вероятностная мера соответственно, X – одномерная случайная величина на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, имеющая конечное математическое ожидание и принимающая только положительные значения, R – множество действительных чисел, X^d – усеченная случайная величина X, определяемая формулой (4), $d \in R, d > 0$. Тогда условное математическое ожидание X при $X \le d$ равно (9):

$$E(X|X \le d) = \frac{E(X^d)}{P_X(X \le d)} \quad (9)$$

где E – символ математического ожидания, P_X – вероятностная функция случайной величины X, X^d – усеченная в точке d случайная величина X.

Доказательство.

Обозначим событие $B = X^{-1}(\{x: x = X(\omega) \wedge x \le d\}), B \in \mathcal{F}$, тогда справедливо, как было показано А.Н. Колмогоровым [2, с. 63]*:

$$E(X|B) = \frac{1}{\mathcal{P}(B)} \int_B X(\omega) \cdot \mathcal{P}(d\omega) \quad (10)$$

где $\int_B$ – интеграл Лебега, ω – элементарное событие ($\omega \in \Omega$).

*Примечание. *Авторское обозначение случайной величины ξ заменено в целях настоящей работы обозначением X, символ математического ожидания M – символом E.*

Из определения вероятностной функции [2, с. 36] ясно, что $P_X(X \le d) = \mathcal{P}(B)$. Для доказательства теоремы необходимо показать, что интеграл Лебега в формуле (10) является математическим ожиданием усеченной случайной величины X^d. Но это очевидно, если записать (8) в виде (11):

$$X^d = \begin{cases} X(\omega), \omega \in B, \\ 0, \omega \notin B. \end{cases} \quad (11)$$

С учетом (11) из определения математического ожидания [2, с. 60]:

$$E(X^d) = \int_\Omega X^d(\omega) \cdot \mathcal{P}(d\omega) = \int_B X(\omega) \cdot \mathcal{P}(d\omega) + \int_{\overline{\mathrm{B}}} 0 \cdot \mathcal{P}(d\omega)$$

$$= \int_B X(\omega) \cdot \mathcal{P}(d\omega)$$

■

Известно, что математическое ожидание случайной величины равно математическому ожиданию условных математических ожиданий (12):

$$E(X) = E(X|X \le d) \cdot P_X(X \le d) + E(X|X > d) \cdot P_X(X > d) \qquad (12)$$

Равенство (12) обосновано, например, в труде А.Н. Колмогорова [2, с. 63]. Чтобы это понять, достаточно рассмотреть события $B = X^{-1}(\{x: x = X(\omega) \wedge x \le d\}), \overline{B} = X^{-1}(\{x: x = X(\omega) \wedge x > d\}), B \in \mathcal{F}$.

Принимая во внимание (9; 12) легко получить (13):

$$E(X|X > d) = \frac{E(X) - E(X|X \le d) \cdot P_X(X \le d)}{P_X(X > d)} = \frac{E(X) - E(X^d)}{P_X(X > d)} \qquad (13)$$

Таким образом с учетом (13), математическое ожидание любой из величин $Y_1, Y_2, \dots Y_N$, определенных в (3), равно (случай с условной франшизой):

$$E(Y) = E(Y|X > d) \cdot P_X(X > d) = E(X|X > d) \cdot P_X(X > d) = E(X) - E(X^d) \qquad (14)$$

Математическое ожидание любой из величин $Y_1, Y_2, \dots Y_N$, определенных в (4), равно (случай с безусловной франшизой):

$$E(Y) = E(Y|X > d) \cdot P_X(X > d) = E(X|X > d) \cdot P_X(X > d) - d \cdot P_X(X > d) =$$

$$\frac{E(X) - E(X^d)}{P_X(X > d)} \cdot P_X(X > d) - d \cdot P_X(X > d) = E(X) - E(X^d) - d \cdot (1 - P_X(X \le d)) \qquad (15)$$

Таким образом, сопоставляя формулы (14) и (15), можно отвлечься на экономическую составляющую и интерпретировать $d \cdot (1 - P_X(X \le d))$ как «стоимость условности франшизы».

О вычислении математического ожидания величины убытка страховщика от страхового случая по полису с франшизой при некоторых распределениях случайной величины убытка

В этой части работы будет рассмотрено два теоретических распределения, которые популярны в актуарной литературе в качестве моделей распределения размера убытка в отдельном страховом случае:

– гамма-распределение;

– логнормальное распределение.

Рассмотрим случайную величину убытка, имеющую гамма-распределение. Это распределение рекомендуется для моделирования среднего размера убытка американскими актуариями Towers-Watson [2, с. 25]. Функция распределения [1, с. 346] задается формулой (16):

$$G(x\colon \alpha,\beta) = \int_0^x \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt \qquad (16)$$

где G – функция распределения случайной величины X, α, β – параметры гамма-распределения, Г – гамма-функция.

Если размер убытка от страхового случая имеет гамма-распределение, то при известных (оцененных) параметрах α, β расчет функции распределения по формуле (16) для оценки «стоимости условности франшизы» может быть осуществлен, поскольку существует множество вычислительных средств, считающих интеграл, приведенный в данной формуле, которыми может воспользоваться актуарий.

Формула расчета математического ожидания усеченной случайной величины, имеющей гамма-распределение, легко может быть представлена в следующем виде (17):

$$E(X^d) = \int_0^d \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^\alpha e^{-\beta x} dx = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \int_0^d \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha+1-1} e^{-\beta x} dx = E(X) \cdot P(X^+ < d), \qquad (17)$$

где $X^+ \sim G(x\colon \alpha+1, \beta)$ – случайная величина, имеющая гамма-распределение с параметрами $\alpha+1, \beta$.

Таким образом, формулы математических ожиданий убытков по полисам с условной и безусловной франшизами (14; 15) для случая гамма-распределения размера убытка от страхового случая могут быть представлены в следующем виде (18; 19):

$$E(Y) = E(X) - E(X^d) = E(X) \cdot (1 - P(X^+ < d)), \qquad (18)$$

$$E(Y) = E(X) \cdot \big(1 - P(X^+ < d)\big) - d \cdot (1 - P(X \leq d)). \qquad (19)$$

Известный немецкий актуарий, профессор Мюнхенского университета Т. Мак отмечает, что «гамма-распределение неприемлемо в качестве модели распределения размера отдельного убытка» [4, с. 73]. Также Т. Мак утверждает: «практический опыт показывает, что логнормальное распределение прекрасно подходит в качестве модели для размера убытка в отдельном страховом случае» [4, с. 75]. Рассмотрим случайную величину убытка X, распределенную логнормально. Плотность вероятности такой случайной величины имеет следующую функцию (20):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \cdot e^{\frac{-(lnx-a)^2}{2\sigma^2}}, x \in (0, \infty) \qquad (20)$$

где a, σ^2 – параметры распределения.

Математическое ожидание усеченной случайной величины соответственно равно (21):

$$E(X^d) = \int_0^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{\frac{-(lnx-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_0^d x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{\frac{-(lnx-a)^2}{2\sigma^2}} dlnx = \int_{-\infty}^{lnd} e^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot$$

$$e^{\frac{-(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \int_{-\infty}^{lnd} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{t^2-2t(a+\sigma^2)+a^2+2a\sigma^2+\sigma^4-2a\sigma^2-\sigma^4}{2\sigma^2}} dt = e^{a+\frac{\sigma^2}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{lnd} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot$$

$$e^{-\frac{(t-a-\sigma^2)}{2\sigma^2}} dt = E(X) \cdot P(lnX^+ < lnd) = E(X) \cdot P(X^+ < d) \qquad (21)$$

где $X^+ \sim LogN(x{:}\, \alpha + \sigma^2, \sigma^2)$ – случайная величина, имеющая логнормальное распределение с параметрами $\alpha + \sigma^2, \sigma^2$.

С учетом полученной формулы (21), запись последнего выражения которой полностью идентичная записи последнего выражения формулы (17), понятно, что и в случае логнормального распределения конечные формулы расчета нетто-премий в данной системе обозначений будут иметь вид (18; 19).

Необходимо отметить, что в российской практике массового страхования (автострахование, например), логнормальное распределение является более подходящим видом для моделирования случайной величины убытка при наступлении страхового случая. В целом, если разбить диапазон значений наблюденных убытков на интервалы и посчитать теоретическую частоту попаданий сумм убытков в каждый интервал с использованием гамма-распределения и логнормального, то суммарное количество попаданий по всей области значений убытка у гамма-распределения немного ближе к наблюденному числу убытков, однако распределение теоретического числа убытков по интервалам даже близко не напоминает эмпирическое распределение, в отличие от логнормального. Функция логнормального распределения является выпуклой вниз при малых суммах убытков, имеет точку перегиба, а затем, в области средних и крупных убытков, становится выпуклой вверх. Гамма-распределение при подходящих оценках параметров имеет функцию распределения выпуклую вверх на всей области определения. Этот факт определяет «неестественную» концентрацию мелких убытков и, как следствие, недооценку числа крупных. Логнормальное распределение более реалистично аппроксимирует эмпирическое распределение в области малых, средних и крупных убытков.

Метод статистической оценки математического ожидания случайной величины убытка страховщика от страхового случая при наличии франшизы

Предлагаемая оценка основывается на рассмотрении массы полисов без франшиз в качестве используемой выборки. «Франшизные» полисы исключаются, т.к. статистика по ним может не включать информацию об убытках в пределах франшиз, понесенных страхователями. Этот факт способен исказить нетто-премию из-за пропуска этой важной информации. Главная предпосылка такой оценки: абсолютно случайный характер использования страхователями франшиз (это требование позволяет говорить о неиспользовании статистики франшизных полисов как об уменьшении объема выборки из некоторой генеральной совокупности с целью исключения пропущенных значений).

Для проведения оценки предлагаемым методом достаточно существования математического ожидания и дисперсии случайной величины размера убытка от страхового случая.

Рассмотрим три утверждения.

Утверждение 1. У усеченной случайной величины X^d существует математическое ожидание.

Утверждение 2. У усеченной случайной величины X^d существует дисперсия.

Утверждение 3. Пусть X – случайная величина, имеющая математическое ожидание. Тогда ее ковариация с усеченной случайной величиной X^d существует.

По свойству математического ожидания [2, с. 60] всякая ограниченная случайная величина имеет математическое ожидание. Так как усеченная случайная величина является ограниченной функцией, то ее математическое ожидание существует или конечно, и утверждение 1 верно.

Для доказательства утверждения 2 достаточно рассмотреть случайную величину $\eta(\omega) = \varphi\left(X^d(\omega)\right) = (X^d - E(X^d))^2$. Очевидно, что эта функция также является ограниченной функцией и притом случайной величиной, см. лемму 2 в [6, с. 216]. Математическое ожидание этой случайной величины – дисперсия X^d по определению. По свойству математического ожидания у ограниченной случайной величины η оно существует, иными словами, у усеченной случайной величины существует дисперсия.

Для доказательства утверждения (3) рассмотрим ковариацию X, X^d:

$$COV(X, X^d) = E(XX^d) - E(X)E(X^d)$$

Рассмотрим функцию $\eta(\omega) = \varphi(X(\omega), X^d(\omega)) = X(\omega) \cdot X^d(\omega)$. Эта функция является случайной величиной. Доказательство утверждения 3 с учетом утверждения 1 сводится к доказательству существования ее математического ожидания при условии существования математического ожидания случайной величины $X(\omega)$. Но математическое ожидание случайной величины η очевидно существует, поскольку XX^d – ограниченная функция:

$$\eta = \begin{cases} X^2, |X| \leq d \\ 0, |X| > d \end{cases},$$

и $|\eta| \leq d^2$.

■

Статистическая оценка должна быть несмещенной и состоятельной.

С особыми проблемами здесь актуарий не сталкивается, т.к. и разделяемый страховщиком и страхователем убыток, и усеченная случайная величина наблюдаемы. Для получения статистики значений усеченной случайной величины достаточно заменить размеры наблюденных убытков, превышающих франшизу, нулями. Теоретические аспекты оценивания генерального среднего и генеральной доли также хорошо проработаны и изложены в специальной литературе по математической статистике. Известно, что несмещенной и состоятельной оценкой генерального среднего является выборочное среднее, а генеральной доли – выборочная доля [3, с. 297–302].

Непосредственно оценке математического ожидания убытка страховщика предшествует сортировка выборки по возрастанию суммы убытка. Предлагаемая оценка математического ожидания случайной величины убытка страховщика от страхового случая по полису с условной франшизой (14) имеет вид (22):

$$\hat{E}(Y) = \hat{E}(X) - \hat{E}(X^d) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^d}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{(i)}}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n_d} x_{(i)}}{n} = \frac{\sum_{i=n_d+1}^{n} x_{(i)}}{n}, \qquad (22)$$

где $\hat{E}$ – оценка математического ожидания, n – число наблюдений (объем выборки), x_i – сумма убытка в i-м наблюдении, x_i^d – выборочное значение усеченной случайной величины суммы убытка в i-м наблюдении, $x_{(i)}$ – i-я порядковая статистика суммы убытка, n_d – число наблюдений, в котором размеры убытков не превышают размера франшизы.

Предлагаемая оценка математического ожидания случайной величины убытка страховщика от страхового случая по полису с безусловной франшизой (15) имеет вид (23):

$$\hat{E}(Y) = \hat{E}(X) - \hat{E}(X^d) - d \cdot \left(1 - \hat{P}_X(X \le d)\right) = \frac{\sum_{i=n_d+1}^{n} x_{(i)}}{n} - d \cdot (1 - \frac{n_d}{n}), \qquad (23)$$

где $\hat{P}_X$ – оценка значения вероятностной функции случайной величины X, в качестве которой выступает выборочная доля элементов, удовлетворяющих неравенству $x_i \le d$.

Оценки (22, 23) являются несмещенными, т.к. на примере (23):

$$E\left(\hat{E}(Y)\right) = E\left(\hat{E}(X)\right) - E\left(\hat{E}(X^d)\right) - d \cdot \left(1 - E\left(\hat{P}_X(X \le d)\right)\right) = E(X) -$$

$E(X^d) - d \cdot \left(1 - P_X(X \le d)\right) = E(Y)$, что следует из несмещенности выборочных средних и выборочной доли.

Покажем состоятельность оценки, приведенной в (22).

Дисперсии оценок равны:

$$V\left(\hat{E}(X)\right) = \frac{V(X)}{n};$$

$$V\left(\hat{E}(X^d)\right) = \frac{V(X^d)}{n}.$$

Вышеприведенные равенства – представления в применении к различным случайным величинам хорошо известного в математической статистике выражения дисперсии выборочного среднего.

Рассмотрим ковариацию оценок математических ожиданий случайных величин X и X^d.

Прежде отметим, что случайные величины X_i и X_j^d взаимно независимы при $i \ne j$. Это следует из того факта, что X_j^d является однозначной функцией от X_j по определению (см. формулу (8)), и взаимной независимости X_i и X_j.

Тогда с учетом независимости величин $X_i, X_j^d, i \ne j$, ковариация оценок равна:

$$COV\left(\hat{E}(X), \hat{E}(X^d)\right) = COV\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}, \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j^d}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} COV\left(X_i, X_j^d\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} COV\left(X_i, X_i^d\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} COV(X, X^d) = \frac{COV(X, X^d)}{n}$$

В силу несмещенности предложенной оценки (22) для доказательства ее состоятельности достаточно показать, что дисперсия оценки стремится к нулю при стремлении объема выборки к бесконечности, что следует непосредственно из неравенства Чебышева [3, с. 291]. Но с учетом трех утверждений это становится очевидным при конечной дисперсии величины X, если только взглянуть на формулу дисперсии оценки $\hat{E}(Y)$:

$$V\left(\hat{E}(Y)\right) = V\left(\hat{E}(X) - \hat{E}(X^d)\right) = V\left(\hat{E}(X)\right) + V\left(\hat{E}(X^d)\right) - 2COV\left(\hat{E}(X), \hat{E}(X^d)\right)$$

$$= \frac{V(X)}{n} + \frac{V(X^d)}{n} - 2\cdot\frac{COV(X, X^d)}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} V\left(\hat{E}(Y)\right) = 0$$

■

Таким образом, предложенная оценка математического ожидания случайной величины убытка страховщика от страхового случая по полису с условной франшизой (22) является несмещенной и состоятельной.

Покажем состоятельность оценки, приведенной в (23).

Необходимо отметить, что число наблюдений, в котором размеры убытков не превышают размера франшизы, – случайная величина. Обозначим ее N_d, и заметим, что она имеет биномиальное распределение с параметрами n и p, равными объему выборки и значению вероятностной функции $P_X(X \le d)$ случайной величины X (а равно любой из величин $X_1, X_2, \dots X_N$) в точке d соответственно. Рассмотрим дисперсию:

$$V\left(d\cdot\left(1 - \hat{P}_X(X \le d)\right)\right) = V\left(d\cdot\left(1 - \frac{N_d}{n}\right)\right) = d^2\frac{1}{n^2}V(N_d)$$

$$= d^2\frac{1}{n^2}\cdot nP_X(X \le d)\cdot\left(1 - P_X(X \le d)\right)$$

$$= \frac{d^2}{n}\cdot P_X(X \le d)\cdot\left(1 - P_X(X \le d)\right)$$

Рассмотрим ковариацию:

$$COV\left(\hat{E}(X),\hat{P}_X(X\le d)\right)=COV\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n},\frac{N_d}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}COV(X_i,N_d)=0.$$

$COV(X_i,N_d)$ равна нулю в силу взаимной независимости случайных величин X_i и N_d. Ни число испытаний Бернулли, ни вероятность положительного исхода испытания ($P_X(X\le d)$) не зависят от конкретного значения величины X_i, которое она принимает в i-м испытании. Обратное утверждение также истинно в силу взаимной независимости и одинакового распределения величин $X_1, X_2, \dots X_N$: распределение X_i не зависит от числа «успехов», имевших место до i-го испытания. Как отмечалось выше, величина X_i^d является функцией от X_i, поэтому X_i^d и N_d также взаимно независимы, тогда аналогично:

$$COV\left(\hat{E}(X^d),\hat{P}_X(X\le d)\right)=0.$$

Наконец, при существующих дисперсиях величин X, X^d и конечной их ковариации:

$$V\left(\hat{E}(Y)\right)=V\left(\hat{E}(X)-\hat{E}(X^d)-d\cdot\left(1-\hat{P}_X(X\le d)\right)\right)$$

$$=V\left(\hat{E}(X)-\hat{E}(X^d)\right)+V\left(d\cdot\left(1-\hat{P}_X(X\le d)\right)\right)-2COV(\hat{E}(X)$$

$$-\hat{E}(X^d),d\cdot\left(1-\hat{P}_X(X\le d)\right)$$

$$=V\left(\hat{E}(X)-\hat{E}(X^d)\right)+V\left(d\cdot\left(1-\hat{P}_X(X\le d)\right)\right)+2d$$

$$\cdot COV\left(\hat{E}(X),\hat{P}_X(X\le d)\right)-2d\cdot COV\left(\hat{E}(X^d),\hat{P}_X(X\le d)\right)$$

$$=\frac{V(X)}{n}+\frac{V(X^d)}{n}-2\cdot\frac{COV(X,X^d)}{n}+\frac{d^2}{n}\cdot P_X(X\le d)$$

$$\cdot\left(1-P_X(X\le d)\right)=>\lim_{n\to\infty}V\left(\hat{E}(Y)\right)=0.$$

■

Таким образом состоятельность несмещенной оценки (23) также доказана.

Эффект освобождения

Влияние франшизы на нетто-премию по полису в актуарной практике принято характеризовать при помощи величины так называемого «эффекта освобождения». Он «задает среднюю долю ожидаемого убытка $E(S)$, от которой страховщик освобождается за счет установления франшизы» [4, с. 304] в размере d. Т. Мак предлагает следующие формулы расчета эффекта освобождения (24):

$$r(d) = \frac{E(\underline{S})}{E(S)} = 1 - \frac{E(\underline{\underline{S}})}{E(S)}, \qquad (24)$$

где $r(d)$ – эффект освобождения в долях единицы, $\underline{S}$ – совокупный первичный риск.

Совокупный первичный риск представляет собой совокупный убыток страхователя от страховых случаев по полису с франшизой (сумму убытка, от которой «освобождается» страховщик в результате введения франшизы).

С учетом выражений (2; 6; 14) величина эффекта освобождения в результате использования условной франшизы равна (25):

$$r(d) = \frac{E\left(X^d\right)}{E(X)} \qquad (25)$$

С учетом формул (2; 6; 15) величина эффекта освобождения в результате использования безусловной франшизы равна (26):

$$r(d) = \frac{E\left(X^d\right) + d\cdot(1 - P_X(X \leq d))}{E(X)} \qquad (26)$$

Как и следовало ожидать, доля освобождения в результате использования безусловной франшизы выше, чем в результате применения условной, это хорошо видно из (25; 26).

Выводы

В результате работы получены методы вычисления на основе логнормального распределения и гамма-распределения, которые могут быть использованы актуарием в расчете нетто-премии по страховому полису с франшизой, а также разработаны методы статистической оценки необходимых параметров, участвующих в таких расчетах без использования аналитически заданного распределения вероятности.

Список литературы

1. Бауэрс Н. Актуарная математика / Н. Бауэрс, Х. Гербер, Д. Джонс [и др.]. – М.: Янус-К, 2001.

2. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – М., 1974.

3. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Юнити-Дана, 2007.

4. Мак Т. Математика рискового страхования. – М.: Олимп-Бизнес, 2005.

5. Математическая энциклопедия. Т. 5 / под ред. И.М. Виноградова. – М.: Советская энциклопедия, 1977–1985.

6. Ширяев А.Н. Вероятность. Кн. 1. – М.: МЦНМО, 2004.

7. Anderson D., Modlin C., Feldblum S. A Practitioner’s Guide to Generalized Linear Models. – London: Towers Watso, 2014.

References

1. Bauers, N., Gerber, Kh., & Dzhons, D. (2001). Aktuarnaia matematika. M.: Ianus-K.

2. Kolmogorov, A. N. (1974). Osnovnye poniatiia teorii veroiatnostei. M.

3. Kremer, N. Sh. (2007). Teoriia veroiatnostei i matematicheskaia statistika. M.: Iuniti-Dana.

4. Mak, T. (2005). Matematika riskovogo strakhovaniia. M.: Olimp-Biznes.

5. Vinogradova, I. M. (1977). Matematicheskaia entsiklopediia. T. 5. M.: Sovetskaia entsiklopediia-.

6. Shiriaev, A. N. (2004). Veroiatnost'. Kn. 1. M.: MTsNMO.

7. Anderson, D., Modlin, C., & Feldblum, S. (2014). A Practitioner's Guide to Generalized Linear Models. London: Towers Watso.

Танюхин Алексей Владимирович – канд. экон. наук, актуарий, Саморегулируемая организация актуариев «Ассоциация профессиональных актуариев», Москва, Россия.

Tanyukhin Aleksey Vladimirovich –candidate of economic sciences, actuarian, Self-regulatory organization of actuaries "Association of professional actuaries", Moscow, Russia.