Нуцубидзе Давид Вахтангович

канд. физ.-мат. наук, доцент

Труб Наталья Васильевна

старший преподаватель

ФГБОУ ВО «Московский государственный гуманитарно-экономический университет»

г. Москва

О МЕТОДИКЕ ОБУЧЕНИЯ ПРИВЕДЕНИЮ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ К ГЛАВНЫМ ОСЯМ ДЛЯ ЛИЦ С ОВЗ

***Аннотация**: в работе решена задача приведения квадратичной формы к главным осям двумя способами. Особое внимание уделяется методическому аспекту данной задачи с учетом ограниченных возможностей здоровья обучаемых.*

***Ключевые слова**: приведение квадратичной формы к главным осям, собственные значения, метод Лагранжа, методика преподавания, лица с ОВЗ.*

Рассмотренная задача приведения квадратичной формы к главным осям служит для обобщения и систематизации пройденного материала и является наглядной демонстрацией возможностей методов всего курса «Линейной алгебры». Особенность этой задачи состоит в том, что для данной квадратичной формы собственные значения могут быть как различными, так и кратными, что вызывает затруднения при решении такого вида задач. Особенно это касается лиц с ограниченными возможностями здоровья, т.к. им нелегко проделать все выкладки и разобраться в нюансах задачи самостоятельно. Наличие опорного решения с квалифицированными объяснениями значительно облегчает практическое освоение этого материала.

Авторы статьи во многом опираются на собственный позитивный опыт проведения занятий с инвалидами на базе ФГБОУ ВО «Московского государственного гуманитарно-экономического университета». На кафедре информационных технологий и прикладной математики разработаны методические рекомендации по избранным темам курса. Авторы считают полезным рассмотреть решение двумя способами.

Первый способ: *приведение квадратичной формы к главным осям методом собственных значений*

Рассмотрим квадратичную форму

$$w(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_2^2 + x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

Матрица заданной квадратичной формы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заданную квадратичную форму можно записать в матричной форме следующим образом:

$$W = \left(x_1, x_2, x_3\right)\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Приведем квадратичную форму к главным осям и к диагональному виду методом ортогональных преобразований. Имеем: $A\lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

Характеристическое уравнение заданной квадратичной формы имеет вид: $A - \lambda E = 0$.

Так, как

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \left(-1\right)\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1-\lambda \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$=(\lambda-1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1) + \left(\lambda - 1 - 1\right) - \left(1 + 1 - \lambda\right) =$$

$$=(\lambda-1)(\lambda^2 - 2\lambda) + \left(\lambda - 2\right) + \left(\lambda - 2\right) = \left(\lambda - 2\right)\left((1-\lambda)\lambda + 2\right) =$$

$$(\lambda - 2)\left(\lambda - \lambda^2 + 2\right) == -(\lambda - 2)\left(\lambda^2 - \lambda - 2\right) = -(\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda + 1)$$

то характеристическое уравнение имеет вид: $= -(\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0.$

Следовательно, корни характеристического уравнения или собственные значения данной квадратичной формы, суть числа: $\lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$

Найдем собственные векторы квадратичной формы соответствующие найденным собственным значениям. Пусть $\lambda_1 = -1$.

Тогда для нахождения соответствующего собственного вектора имеем уравнение:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{или } \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{или } \begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ \frac{3}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 = 0 \\ -\frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Полученная система линейных уравнений при n = 3 неизвестных имеет ранг r = 2. Следовательно размерность собственного подпространства, соответствующее собственному значению $\lambda_1 = -1$, $\boldsymbol{k = nr = 3}$. Это значит, что собственному значению $\lambda_1 = -1$ соответствует собственный вектор с координатами: $\boldsymbol{x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 1.}$

То есть собственному значению $\lambda_1 = -1$ соответствует собственный вектор $|e_2'| = \sqrt{2}$. Так как $|e_1'| = \sqrt{3}$ то, пронормировав вектор $\boldsymbol{e_1'}$, имеем, что собственному значению $\lambda_1 = -1$ соответствует собственный вектор $e_1' = (\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Пусть $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Тогда для нахождения соответствующего собственного вектора имеем уравнение: $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ или $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Полученная система линейных уравнений при $n = 3$ неизвестных имеет ранг $r = 1$. Следовательно, размерность собственного подпространства, соответствующее собственному значению $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ $k = n - r = 3 - 1 = 2$. Это означает, что собственному значению $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ соответствуют 2 собственных вектора с координатами: $e'_2 = (1; 0; -1)$ и $e'_3 = (1; -1; 0)$.

Так, как $|e'_2| = \sqrt{2}$ и $|e'_3| = \sqrt{2}$ то нормируя векторы e'_2 и e'_3 получим, что собственному значению $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ соответствуют собственные векторы:

$$e'_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ и } e'_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right).$$

Скалярные произведения $(e'_1; e'_2)$ и $(e'_1; e'_3)$ векторов e'_1 и e'_2, и векторов e'_1 и e'_3 соответственно равны нулю, а скалярное произведение $(e'_2; e'_3)$ векторов e'_2 и e'_3 отлично от нуля. Ортогонализируем векторы e'_2 и e'_3. Будем искать вектор e''_3 в виде: $e''_3 = e'_3 + \alpha e'_2$. И подберем коэффициент α таким образом, чтобы выполнилось равенство: $e''_3 * e'_2 = 0$. Имеем: $\frac{1}{2} + \alpha = 0$ или $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Таким образом: $e''_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.

Так, как длина вектора e''_3 равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$ то система векторов: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ образует ортонормированный базис в трехмерном пространстве. Итак, новый базис: $e'_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{k}$

$$e'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + 0\bar{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{k}$$

$$e''_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{i} - \frac{2}{\sqrt{6}}\bar{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{k}.$$

Матрица перехода имеет вид: $B=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

Проведем некоторые проверочные вычисления. Определитель матрицы B равняется:

$$|B|=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{2}{\sqrt{12}}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{18}}+\frac{2}{\sqrt{18}}\right)+\frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=-\frac{2}{6}-\frac{3}{6}-\frac{1}{6}=-1.$$

Далее: $\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ 0\\ -\sqrt{2}\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{6}}\\ -\frac{4}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

Далее: $(e_1';e_2';e_3'')=(\bar{i}\,;\bar{j}\,;\bar{k})\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$

Методом элементарных преобразований найдем матрицу, обратную к матрице B. Имеем:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{6}} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{6}} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{\sqrt{6}} & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{array}\right) \sim$$

Таким образом: $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = B^T$

Действительно:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Далее, т.к.:

$$(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = (x_1', x_2', x_3')\, B^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left(B^{-1}\right)^T \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$w(x) = \begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{4}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1' + 2x_2' + 2x_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = -x_1'^2 + 2x_2'^2 + 2x_3'^2$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^{-1} = -\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$A_{11} = -\frac{2}{\sqrt{12}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad A_{21} = -\frac{2}{\sqrt{12}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad A_{31} = -\frac{2}{\sqrt{12}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$A_{12} = -\left(\frac{1}{\sqrt{18}} + \frac{2}{\sqrt{18}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad A_{22} = \frac{1}{\sqrt{18}}$ $\qquad A_{32} = -\left(-\frac{2}{\sqrt{18}} - \frac{1}{\sqrt{18}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$A_{13} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ $\qquad A_{23} = -\left(-\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{2}{\sqrt{6}}$ $\qquad A_{33} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$

Второй способ решения: *методом Лагранжа*.

Рассмотрим квадратичную форму: $w = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3$

Заданную квадратичную форму можно записать в матричной форме следующим образом: $W = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Матрица $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ это матрица заданной квадратичной формы.

Приведем заданную квадратичную форму к диагональному виду или к главным осям методом Лагранжа. Имеем: $w=x_1^2-2x_1x_2-2x_1x_3+x_2^2+x_3^2-2x_2x_3=$

$$=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3++2x_1x_3-4x_2x_3=\left(x_1-x_2-x_3\right)^2-4x_2x_3$$

Введем новые переменные: $x_1^{'}=x_1-x_2-x_3$, а $x_2^{'}=x_2$ и $x_3^{'}=x_3$

Тогда квадратичная форма примет вид: $w(x)=x_1^{'2}-4x_2^{'}x_3^{'}$

Введем новые переменные: $x_1^{''}=x_1^{'}$, а $x_2^{''}=x_2^{'}+x_3^{'}$ и $x_3^{''}=x_2^{'}-x_3^{'}$

Тогда, так как $x_1^{'}=x_1^{''}$, и $x_2^{'}=\frac{1}{2}\left(x_2^{''}+x_3^{''}\right)$, и $x_3^{'}=\frac{1}{2}\left(x_2^{''}-x_3^{''}\right)$,

то квадратичная форма примет вид:

$$w(x)=x_1^{''2}-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(x_2^{''}+x_3^{''}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(x_2^{''}-x_3^{''}\right)=x_1^{''2}-x_2^{''2}+x_3^{''2}$$

Найдем такое линейное преобразование, которое приводит заданную квадратичную форму к диагональному виду. Имеем: $x_1^{'}=x_1-x_2-x_3$, а $x_2^{'}=x_2$ и $x_3^{'}=x_3$. Или $x_1=x_1^{'}+x_2^{'}+x_3^{'}$, а $x_2=x_2^{'}$ и $x_3=x_3^{'}$. Учитывая, что $x_1^{'}=x_1^{''}$

$$x_2^{'}=\frac{1}{2}\left(x_2^{''}+x_3^{''}\right)$$

$$x_3^{'}=\frac{1}{2}\left(x_2^{''}-x_3^{''}\right)$$

Получим: $x_1=x_1^{''}+x_2^{''}$

$$x_2=\frac{1}{2}x_2^{''}+\frac{1}{2}x_3^{''}$$

$$x_3=\frac{1}{2}x_2^{''}-\frac{1}{2}x_3^{''}$$

То есть матрица перехода от базиса $(i,\ j,\ k)$ к базису $\left(e_1^{''},e_2^{''},e_3^{''}\right)$ имеем вид:

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Это означает, что координаты (x_1, x_2, x_3) и $\left(x_1^{"}, x_2^{"}, x_3^{"}\right)$ связаны соотношением:

$(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1^{"}, x_2^{"}, x_3^{"}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{"} \\ x_2^{"} \\ x_3^{"} \end{pmatrix}$ где матрица

$\mathrm{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ транспонированная к матрице B.

$$e_1^{"} = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3$$

$$e_2^{"} = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3$$

$$e_3^{"} = a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\left(e_1^{"}, e_2^{"}, e_3^{"}\right) = \left(e_1, e_2, e_3\right) * A$$

$$\overline{x} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$$

$$\overline{x} = x_1^{"}e_1^{"} + x_2^{"}e_2^{"} + x_3^{"}e_3^{"}$$

$$x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 =$$

$$= x_1^{"}a_{11}e_1 + x_1^{"}a_{21}e_2 + x_1^{"}a_{31}e_3 + x_2^{"}a_{12}e_1 + x_2^{"}a_{22}e_2 + x_2^{"}a_{32}e_3 + x_3^{"}a_{13}e_1 + x_3^{"}a_{23}e_2 + x_3^{"}a_{33}e_3 =$$

$$= \left(x_1^{"}a_{11} + x_2^{"}a_{12} + x_3^{"}a_{13}\right)e_1 + \left(x_1^{"}a_{21} + x_2^{"}a_{22} + x_3^{"}a_{23}\right)e_2 + \left(x_1^{"}a_{31} + x_2^{"}a_{32} + x_3^{"}a_{33}\right)e_3 =$$

$$= \left(e_1, e_2, e_3\right) \cdot A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{"} \\ x_2^{"} \\ x_3^{"} \end{pmatrix}$$

$$x_1 = a_{11}x_1^{"} + a_{12}x_2^{"} + a_{13}x_3^{"}$$

$$x_2 = a_{21}x_1^{"} + a_{22}x_2^{"} + a_{23}x_3^{"}$$

$$x_3 = a_{31}x_1^{"} + a_{32}x_2^{"} + a_{33}x_3^{"}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$x_1^2=x_1^{"2}+2x_1^{"}x_2^{"}+x_2^{"2}$$

$$x_2^2=\frac{1}{4}x_2^{"2}+\frac{1}{2}x_2^{"}x_3^{"}+\frac{1}{4}x_3^{"2}$$

$$x_3^2=\frac{1}{4}x_2^{"2}-\frac{1}{2}x_2^{"}x_3^{"}+\frac{1}{4}x_3^{"2}$$

$$x_1^{"2}+\frac{3}{2}x_2^{"2}+\frac{1}{2}x_3^{"2}+2x_1^{"}x_2^{"}$$

$$-2x_1x_2=-x_1^{"}x_2^{"}-x_1^{"}x_3^{"}-x_2^{"2}-x_2^{"}x_3^{"}$$

$$-2x_1x_3=-x_1^{"}x_2^{"}+x_1^{"}x_3^{"}-x_2^{"2}+x_2^{"}x_3^{"}$$

$$-2x_2^{"}x_3^{"}+\frac{1}{2}\left(-x_2^{"2}+x_3^{"2}\right)$$

$$-\frac{1}{2}x_2^{"2}+\frac{1}{2}x_3^{"2}+2x_1^{"}x_2^{"}$$

$$w=x_1^{"2}-x_2^{"2}+x_3^{"2}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix} \qquad \left|A^{-1}\right|=-\frac{1}{2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1\end{array}\right)\sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1\end{array}\right)$$

$$A=\begin{pmatrix}2 & -2 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \qquad |A|=-2$$

$$w = x_1^2 - 2x_1x_1 - 2x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - x_2x_3 =$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_2 + x_2^2 - x_2x_1 - x_1x_1 - x_2x_1 + x_3^2 =$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_1 - 2x_1x_1 - 2x_2x_3$$

$$w = (x_1, x_2, x_3) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$w = (x_1'', x_2'', x_3'')\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1'', x_2'', x_3'')\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1'', x_2'', x_3'')\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = (x_1'', -x_2'', x_3'')\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = x_1''^2 - x_2''^2 + x_3''^2$$

Вывод: метод Лагранжа позволяет получить канонический вид квадратичной формы над тем же множеством *R*, над которым рассматривается исходная форма – например, если коэффициенты формы *f* являются рациональными, то и коэффициенты ее канонического вида будут также рациональными.

Список литературы

1. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре: учебное пособие. 13-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2010. – 480 с.

2. Нуцубидзе Д.В. Поведение одного решения уравнения теплопроводности на бесконечности / Д.В. Нуцубидзе, Н.В. Труб // Человек. Общество. Инклюзия. – 2018. – №1 (33). – С. 125–128.

3. Нуцубидзе Д.В. Концепция контекстно-обучающей игры для лиц с ДЦП / Д.В. Нуцубидзе, Н.В. Труб // Интеллектуальные технологии и средства реабилитации и абилитации людей с ограниченными возможностями (ИТСР-2018): труды III межд. конф. (г. Москва, 29–30 ноября 2018 г.). – М.: МГГЭУ, 2018. – С. 283–288.