УДК 514.132

DOI 10.21661/r-541066

В.Д. Чемерис, И.А Чемерис

ПРЯМОУГОЛЬНИКИ В ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Аннотация*: если заменить V Постулат Евклида на Постулат Лобачевского, то можно получить прямоугольники с количеством углов более 4-х. В статье описана методика построения таких прямоугольников.*

Ключевые слова*: прямоугольники, параллельные прямые линии, Пятый постулат Евклида, геометрия Лобачевского, Одиннадцатая аксиома Евклида.*

V.D. Chemeris, I.A. Chemeris

RECTANGLES IN LOBACHEVSKY GEOMETRY

Abstract*: if we replace the V Postulate of Euclid with the Postulate of Lobachevsky, then we can get rectangles with more than 4 angles. The article describes the methodology for constructing such rectangles.*

Keywords*: rectangles, parallel straight lines, Euclid's fifth postulate, Lobachevsky geometry, Euclid's eleventh axiom.*

Классическая *геометрия Евклида* достаточно хорошо ложится на наши представления об окружающем мире. Совсем по-другому обстоит дело с альтернативной геометрией – с *геометрией Лобачевского*. Фигуры в ней получаются часто экзотические и даже нереалистичные. Николай Иванович хорошо понимал необычность своей геометрии и именовал её «воображаемой» [1, с. 313].

Прямоугольники того вида, к которому мы привыкли в *геометрии Евклида*, для *геометрии Лобачевского* невозможны, так как сумма углов любого четырёхугольника в этой геометрии всегда меньше 360º. Ведь любой четырёхугольник легко делится на два треугольника. А, хорошо известно, *сумма углов треугольника в геометрии Лобачевского меньше 180º* [1, с. 28–29]. Сумма углов двух треугольников, соответственно, не может быть равной 360º. В силу указанных выше обстоятельств, это должно быть характерно и для четырёхугольника. В четырёхугольнике Лобачевского сумма углов всегда меньше 360º.

В классическом *прямоугольнике* все четыре угла прямые (90º). Следовательно, сумма этих углов никак не может соответствовать «воображаемой» геометрии и быть меньше 360º.

Итак, *прямоугольники* обычного вида в «воображаемой» геометрии не существуют. Но это всего лишь один вид. А ведь *прямоугольники* – это целый класс. И вот почти всё многообразие этого класса приходится на *геометрию Лобачевского*.

Справедливость этого утверждения крайне подозрительна, поэтому мы начнём издалека – с треугольников.

Возьмём два равнобедренных треугольника, имеющих равные углы (γ) при вершинах (Рис. 1*а*). Угол при основании малого треугольника обозначим α_1, большого – α_2, а площади соответственно S_1 и S_2.

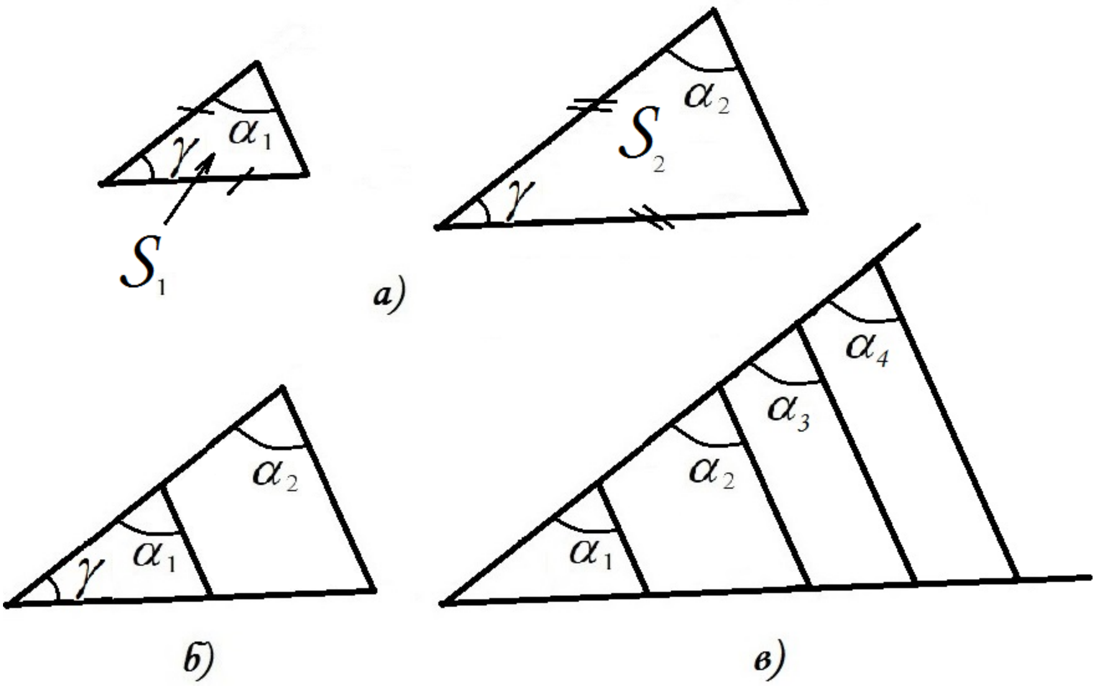

Рис. 1. *Равнобедренные равновершинные треугольники:*

а) два равнобедренных треугольника; б) наложение треугольников;

в) построение равнобедренных равновершинных треугольников

на продолжениях боковых сторон

Суммы углов этих треугольников: $\gamma + \alpha_1 + \alpha_1$; $\gamma + \alpha_2 + \alpha_2$.

Выполним наложение одного треугольника на другой (Рис. 1*б*). Результат в прямом смысле очевиден:

$$S_1 < S_2.$$

Известно, что *в геометрии Лобачевского сумма углов треугольника, имеющего меньшую площадь, больше, чем сумма углов треугольника, имеющего большую площадь* [2, с. 60]. Следовательно:

$$\gamma + \alpha_1 + \alpha_1 > \gamma + \alpha_2 + \alpha_2,$$

$$\alpha_1 > \alpha_2.$$

Итак, угол при основании большего треугольника оказался меньше, чем угол при основании меньшего треугольника. Можно полагать, что, чем дальше будет основание от вершины, тем больше будет площадь, и тем меньше будет угол при основании (рис. 1*в*):

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4.$$

Важно отметить, что увеличение размеров треугольника ничем не ограничивается до бесконечности, и, соответственно полученным результатам, угол при основании может уменьшаться и уменьшаться вплоть до нуля. И даже, как полагает *геометрия Лобачевского*, основание может совсем оторваться от боковых сторон. Но до такой крайности нам доходить не потребуется.

Построим равнобедренный треугольник с углом 60^o при вершине (рис. 2*а*). Особенностью этого угла является то, что его величина кратна полному углу (360^o). Кроме того, очень важно в выбранном треугольнике, что угол в основании больше половины прямого угла ($>45^o$).

Если отодвигать от вершины основание, то угол при основании будет уменьшаться и уменьшаться, что было доказано выше. Выходит, основание можно отодвинуть настолько, что угол при основании станет равным 45^o (рис. 2*б*).

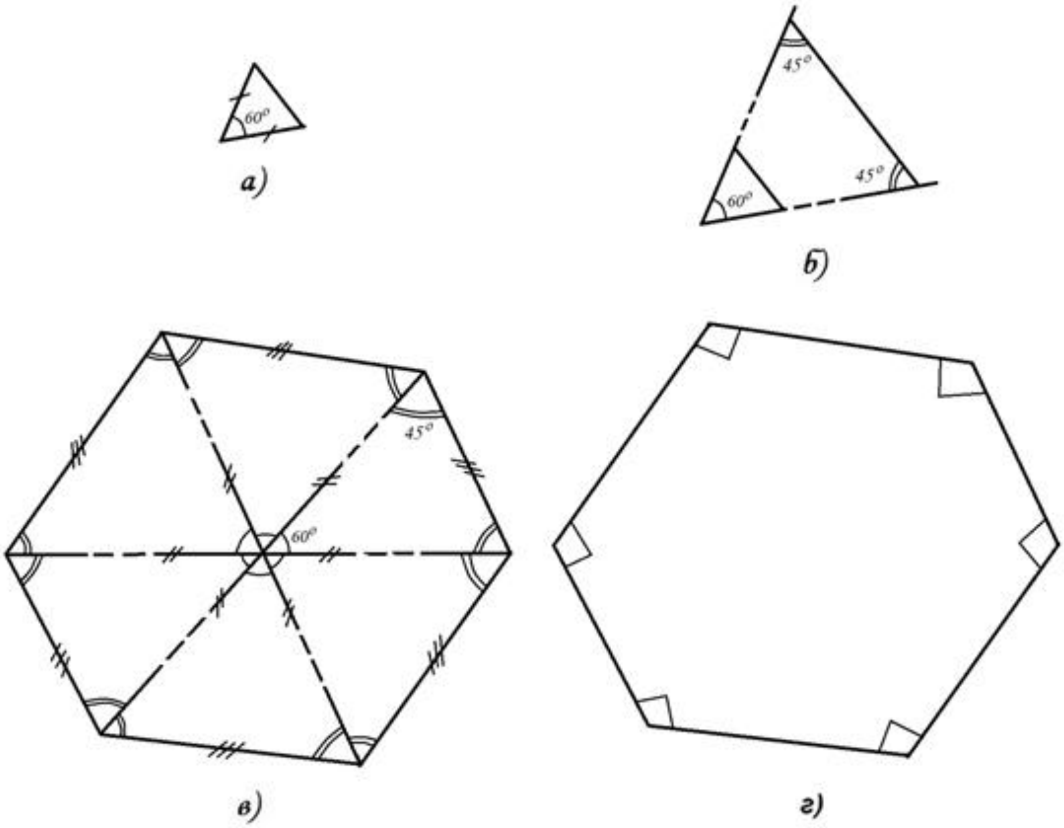

Рис. 2. *Построение шестиугольного прямоугольника в геометрии Лобачевского: а) равнобедренный треугольник с величиной угла при вершине кратной полному углу и углами при основании больше половины прямого угла, б) равнобедренный треугольник с тем же углом при вершине и с величиной углов при основании равной* 45^{o}*, в) шесть равных равнобедренных треугольников с общей вершиной, г) шестиугольный прямоугольник*

На этом остановимся. Равнобедренный треугольник с углом при основании в половину прямого – это именно то, что и требовалось получить. Теперь займёмся, наконец, построением *прямоугольника*.

К полученному треугольнику приложим последовательно ещё пять таких же, так, чтобы у всех шести совпадали вершины (рис. 2*в*). Последний треугольник приложится своей боковой стороной к первому. Таким образом, из шести равных равнобедренных треугольников сложился шестиугольник. Углы при вершинах этого шестиугольника равны удвоенной величине угла при основании равнобедренного треугольника, то есть 2 х 45^{o} = 90^{o}. Получается, что углы при вершинах шестиугольника прямые. Таким образом, можно утверждать, что полученная фигура является *шестиугольным прямоугольником* (рис. 2*г*).

Аналогичным способом в *геометрии Лобачевского* можно построить *прямоугольники* с любым количеством углов, начиная с пяти.

«Воображаемая» геометрия допускает существование шестиугольных, семиугольных, десятиугольных и даже сто-угольных *прямоугольников*. И, что совсем непостижимо, бесконечно-угольных. Всё это так фантасмогорично, но, тем не менее, как показывает цепочка рассуждений, логически вытекает из оснований *геометрии Лобачевского*.

Почти всё многообразие *прямоугольников* приходится на *геометрию Лобачевского*. На *геометрию Евклида* приходится только один вид – четырёхугольный. По-видимому, оставшиеся три – треугольные, двуугольные и одноугольные приходятся на *геометрию Римана*.

Надеюсь, мы достаточно убедительно показали, что *в геометрии Лобачевского*, альтернативной *геометрии Евклида, допускается существование прямоугольников с количеством углов, превышающих 4*.

Список литературы

1. Лобачевский Н.И. Избранные труды по геометрии // ред. Академика П.С. Александрова, Б.Н. Делоне, П.К.Рашевского; ком. В.Ф. Кагана, А.П. Норлена, Б.Л. Лаптева [и др.]; ред. изд-ва К.П. Гуров; техн. Ред. А.А. Киселева. – М.: Изд-во Академии наук СССР, 1956. – 596 с.

2. Кутузов Б.В. Геометрия Лобачевского и элементы оснований геометрии: пособие для учителей средней школы. – М.: Гос. учебно-педагогическое изд-во Министерства просвещения РСФСР, 1950. – 127 с.

References

1. Lobachevskii, N. I. (1956). Izbrannye trudy po geometrii. red. Akademika P.S. Aleksandrova, B.N. Delone, P.K.Rashevskogo; kom. B.Ph. Kagana, A.P. Norlena, B.L. Lapteva [i dr.]; red. izd-va K.P. tekhn. Red. A.A. Kiseleva, 596. Gurov;; M.: Izd-vo Akademii nauk SSSR.

2. Kutuzov, B. V. (1950). Geometriia Lobachevskogo i elementy osnovanii geometrii., 127. RSFSR.

Чемерис Владимир Дмитриевич – магистр техн. наук, инженер, Екатеринбург, Россия.

Chemeris Vladimir Dmitrievich – master of engineering sciences, engineer, Ekaterinburg, Russia.

Чемерис Илья Андреевич – ученик МАОУ «Гимназия №174», Екатеринбург, Россия.

Chemeris Ilia Andreevich – student MAEI "Gymnasium №174", Ekaterinburg, Russia.