УДК 53

DOI 10.21661/r-541132

М.А. Авдыев

ТЕОРЕМА ФЕРМА НА ШЕСТИ ГРАНЯХ ДЕРЕВЯННОГО КУБИКА

Аннотация: *Великая теорема Ферма доказывается средствами физики, математики, аналитической геометрии в объёме знаний школьной программы. Основные идеи доказательства можно уместить на детском деревянном кубике.*

Ключевые слова: *Ферма, великая Теорема, гиперкуб, симметрия, однородность пространства, слой, гиперплоскость, теория множеств.*

M.A. Avdyev

FERMAT`S LAST THEOREM PROOF ON SIX FACES OF A WOODEN CUBE

Abstract: *Fermat's Last Theorem has been proved on the basis of school Physics, Mathematics, analytical Geometry. The main conceptions of the proof one can write on a math toy in the form of a wooden cube for children. Six faces of the cube are enough to deliver the main ideas of proof.*

Keywords: *Fermat's Last Theorem, hypercube, symmetry, homogeneity of space, layer, hyperplane, set theory.*

Цель исследования состоит в поиске наглядного доказательства Великой Теоремы Ферма, сформулированной Пьером же Ферма в 1672 г.:

$$a^n + b^n = c^n , \tag{1}$$

не имеет решений в целых, кроме нулевых значений при n > 2.

Предположим, что искомая тройка чисел (1) существует. Можно сопоставить ей соответствующую фигуру в виде гиперкубов с ребрами a, b и c, при этом гиперкубы вписаны друг в друга в пространстве действительных чисел R^n. Хотя ребра гиперкубов – целые числа, но выбор R^n позволяет работать с фигурой, обладающей свойством *непрерывности*, что будет использовано в дальнейших рассуждениях.

Основные выводы доказательства легко обнаружить, анализируя двумерный и трехмерный случай – квадраты и кубы. Далее, рассуждая по индукции, легко обобщить результаты на многомерный случай, потому что все закономерности выявляются уже для квадратов и кубов [1]. Чтобы облегчить поиск истины, который невозможно прекратить [2; 3], предлагая обществу стосорокастраничное доказательство Великой Теоремы, найденное в 1994 г. проф. математики, деканом факультета математики Принстонского Университета сэром Эндрю Уайлсом, рассмотрим Великую теорему Ферма с позиции аналитической геометрии и теории множеств.

Свойства гиперкуба и его граней-ребер

Точка, отрезок длиной *a*, квадрат a^2, трёх мерный куб a^2 тессеракт a^4 и т.д. – это гиперкубы соответственно 0-мерного, 1-мерного, 2-мерного, 3-мерного, 4-мерного пространства … В этом ряду каждая следующая фигура размерности *n* образуется путем перемещения гиперкуба размерности *n-1* на длину ребра *a* в направлении, поперечном каждому из *n-1* других.

Интернет изобилует рисунками и видео клипами с изображением многомерных гиперкубов, их проекциями на двумерную плоскость, расположенную перед глазами обычного человека – существа трехмерного пространства. Благодаря эффекту параллакса можно увидеть достаточно любопытные структуры. Но одного любопытства недостаточно – требуется аналитическое мышление, которое поможет ощутить красоту гиперкуба, и как косвенный результат – «увидеть» наглядное решение Великой Теоремы Ферма. Попробуем?

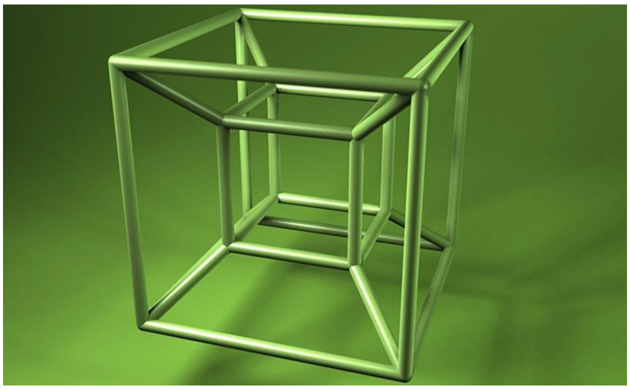

Рис. 1. Четырехмерный куб или тессеракт,
спроецированный на двумерную плоскость с эффектом параллакса

Гиперкуб обладает свойством симметрии и непрерывности. Если расположить начало координат в центре гиперкуба, то каждая его вершина будет отдалена от начала координат на расстояние $\frac{1}{2}a\sqrt{n}$, что легко вычисляется по теореме Пифагора. Перпендикуляр, опущенный из центра гиперкуба на любую его грань, проходит через её центр и длина образуемого отрезка (высоты любой из совершенно одинаковых из 2n гиперпирамид, на которые рассекается гиперкуб) составляет ½a. Легко убедиться, что грань гиперкуба – это гиперкуб размерности на единицу меньше, также имеющий грани-ребра размерности n-2, n-3 …вплоть до одномерных ребер и нольмерных вершин (для случая пространства целых чисел роль вершин принимают на себя единичные кубы 1^n – для простоты далее обозначаемые как *гиперкубики*. Грань гиперкуба располагается в гиперплоскости, перпендикулярной только что построенной высоте и проходящей через основание этой высоты – точку пересечения прямой, исходящей из начала координат ортогонально грани гиперкуба, с этой гранью. Образно говоря, с позиции гипотетического n-мерного существа, все грани гиперкуба воспринимаются не как объемные, а как плоские фигуры.

Гиперкубам с целочисленными рёбрами a, b, c соответственно можно сопоставить подмножества A, A ∪ B, A ∪ B ∪ C в большом гиперкубе c^n, вмещающем средний и малый. Будем обозначать c^n как основное множество U – *универсум*. Определим отношение *эквивалентности* F над U x U, таким образом, что $F = \{ (y, z) \mid \forall\, y \in U\ \exists!\, x \in U \}$ – другими словами данное отношение взаимнооднозначно сопоставляет в большом гиперкубе U один гиперкубик другому, что означает равенство их объёмов в силу однородности n-мерного пространства R^n. F тотально и функционально. Если ∃ F по отношению к определённым выше подмножествам F: A → C или C = F(A), то это означает равенство мощностей этих подмножеств. Теорема Ферма утверждает, что мощности подмножеств |A| и |C| не могут быть равными в пространстве целых чисел, обозначенном в этой публикации как Z^n, размерности более двух.

Представим себе вписанные друг в друга гиперкубы с рёбрами, полученными из ряда последовательных натуральных чисел, центры которых совпадают с началом координат, а грани – перпендикулярны осям координат. Гиперкубы e_i с рёбрами i на основе последовательного ряда натуральных чисел, вписанные друг в друга, образуют возрастающую цепь и отношения включения в U:

$$e_1 \subset e_2 \ldots \subset e_k \subset e_{k+1} \ldots e_{k+l} \subset e_{k+l+1} \ldots \subset e_{k+l+m} \subseteq U$$

$$1^n \cup S_1 \cup S_2 \ldots \cup S_k \cup S_{k+1} \ldots \cup S_{k+l} \cup S_{k+l+1} \ldots \cup S_{k+1+m} \subseteq U$$

В этом выражении задано *разбиение* множества U на попарно непересекающиеся подмножества, именуемые далее *слоями*, определяемыми как разность подмножеств $S_i = e_{i+1} \setminus e_i$. Здесь помимо гиперкубика 1^n или e_1 в центре координат первые *k* слоёв образуют малый гиперкуб a^n, к ним добавляется *l* слоев для формирования среднего гиперкуба b^n, и наконец еще *m* слоев для образования c^n, который рассматривается как универсум U.

Вместо 1^n может быть элемент 2^n, в зависимости от чётности, но с учетом отговорок ниже, эта детализация не приводит к качественным отличиям. Фигура в виде композиции гиперкубов «начало координат в вершинах» и «начало координат в центрах гиперкубов» преобразуются друг в друга за счет отражения от гиперплоскостей размерности n-1, препендикуларных осям координат, и масштабирования q, как например для случая на плоскости ниже.

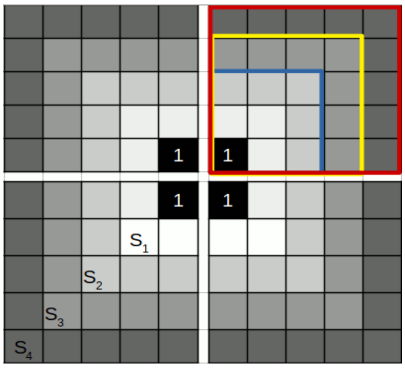

Рис. 2. Для размерности пространства n = 2, квадраты на плоскости, легко увидеть Пифагорову тройку $3^2+4^2=5^2$

Здесь вершина каждого гиперкуба, выделенного цветом, совпадает с началом координат, в дальнейшем начало координат альтернативно будет помещаться также в центр гиперкуба для удобства анализа. Фигура в виде композиции трех вложенных гиперкубов «начало координат в вершинах» и «начало координат в совмещенных центрах гиперкубов» преобразуются друг в друга за счет отражения от плоскостей, перпендикулярных осям, и масштабирования в целое число раз *q*. (Если поделить ребро гиперкубика в q раз, то такая смена масштаба приведет лишь к увеличению в q^n раз всех алгебраических выражений, но не изменит их вида.)

Заметим, что объёмы наших подмножеств совпадают с их мощностями

$$a^n = V_A = |A|,\ b^n = V_A + V_B = |A| + |B|,\ c^n = V_A + V_B + V_C = |A| + |B| + |C|, \qquad (3)$$

при этом все объёмы отличны от нуля в силу иррациональности $\sqrt{2}$, условия позволяющего упорядочить гиперкубы по нарастающей $a < b < c$, не меняя общности. Что происходит при рассечении описанной выше фигуры из трёх вписанных друг в друга гиперкубов любой осью координат? Наблюдатель увидит ряд вложенных друг в друга отрезков длины 1, 3, 5, 7... и так далее. Поскольку через две прямые проходит лишь одна плоскость (аксиома геометрии работает и для многомерного пространства), путём логических рассуждений легко понять что в результате рассечения описанной фигуры двухмерной плоскостью, проходящей через начало координат и две произвольные оси координат, образуются вложенные друг в друга квадраты с центром в начале координат. Это сечение *не зависит от размерности фигуры* при $n \geq 2$. Любопытно узнать, почему Пифагоровы тройки существуют только для n =2, но не для n ≥ 2? В геометрической форме теорема Ферма формулируется так, что *не существует трех вписанных друг в друга гиперкубов с целочисленными ребрами* a, b, c *для которых согласно определению (3)* $V_A = V_B$.

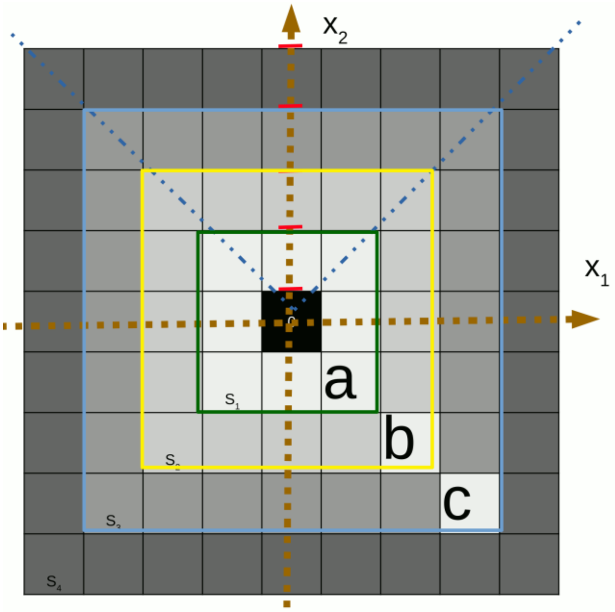

Рис. 3. Слои многомерного гиперкуба, *k, l, m пер*есекаясь с двумерной плоскостью, проходящей через центр координат и оси x_1, x_2, образуют сечение, где видны слои S_1, S_2... S_i. Проекция создана без эффекта параллакса, в отличие от Рис. 2. Фигура рассечена на 2n идентичные гиперпирамиды

Структуру и множество элементов слоя (2) легко понять из разложения в ряд по биноминальным коэффициентам разности последовательно следующих гиперкубов с целочисленными рёбрами:

$$S_i = (i+1)^n - i^n = \sum_{j=0}^{j=n-1} i^j\, C_n^j \cdot 1^{n-j}\,, \qquad (4)$$

из этого разложения легко заметить, что размерность *слоя* на единицу меньше охватываемого им n-куба. Объём слоя в первом приближении аппроксимируется как площадь гиперповерхности гиперкуба, равная na^{n-1}, но помимо элементов n-1 степени содержит ряд более низких размерностей. (Мысленно разделим один кубометр трехмерного пространства на 10^6 кубическим сантиметров, затем увеличим масштаб в 10 раз до миллиметров, итого 10^9 кубических миллиметров.) Как при этом изменится вид формулы (4)? Каждый элемент вида i^j увеличится в q^j

раз, а сомножитель 1^{n-p} не изменится – изменится сама геометрия слоя, который станет тоньше относительно его большого ребра i, из чего следует, что слой содержит элементы последовательного ряда размерностей от нуля или 1^n – аналога *точки* в R^n пространстве до *ребер* $ai^{n-2,}$ *граней* a^2i^{n-3} и гиперграней наибольшей размерности $i^{n-1}\ 1^0$.

В терминах теории множеств вместо знака суммы может использоваться знак ∪, при условии, что $i^j * 1^{n-j}$ интерпретируется как геометрическая фигура – параллелепипед с ребрами i и 1 в n-мерном пространстве, а биноминальный коэффициент – как повторение идентичной копии фигуры определенное число раз.

Возвращаясь к ранее определенному отношению эквивалентности заметим, что хотя слои образуют возрастающую цепочку, что указывает на наличие отношений сравнения, обладающего свойствами рефлексивности, *антисимметричности*, транзитивности само по себе это обстоятельство ещё не исключает возможности нахождения отношений эквивалентности (рефлексивности, *симметричности*, транзитивности) во всём U, включая подмножество – *ограничения* до конкретного слоя, например: $F = \{x, y \mid y_i = -x_i\}$ это отношение, в целом, связывает отношением эквивалентности каждый гиперкубик с его «антиподом» в результате центральной симметрии или отражение от гиперплоскости, ортогональной оси x^n, проходящей через начало координат: $F = \{x, y \mid y_n =- x_n \wedge y_p = -x_p : p < n\}$, либо разнообразные преобразования, подобные вращению n-мерного кубика Рубика – все это представляет собой широкий спектр отношений эквивалентности, и это легко понять из общих соображений симметричности фигуры и однородности R^n, его изотропности.

Условие равенства мощностей подмножеств |A| и |C| или $V_A= V_C$ равносильно наличию отношения *эквивалентности* $F \subseteq C \times A$, данное отношение тотально, функционально, сюрьективно и инъективно, y = F(x) является биекцией. С позиции сравнения объёмов $V_A= V_C$ нас интересуют только операции между слоями из разных подмножеств.

Не меняя общности, представим F как суперпозицию отношений: F = G * H, где $H = \{(x, y) \mid x \in \{S_i\} \wedge y \in \{S_i\}\}$, $G = \{(x, y) \mid x \in \{S_i\} \wedge y \in \{S_j\} : i \neq j\}$.

Другими, словами бинарное отношение может быть определено как над одним конкретным слоем, так между разными слоями. Удобно различать первое от второго.

Доказательство теоремы Ферма сводится к вопросу: существует ли отношение эквивалентности между разными слоями G для исследуемой фигуры? И как следствие этого, возможно ли задать функцию A = G(C)?

Сфокусируем внимание на *ограничении* отношения $G|_{Si} = \{(x, y)| \ x \in \{Si\} \wedge y \in \{Sj\} \wedge x \in C, y \in A \}$. Из соображений симметричности фигуры и виде трех вложенных гиперкубов, а также идентичной структуры каждого слоя, следует, что результат работы функции y = G(x) представляет собой множество слоёв в A или все подмножества A. В самом деле, поскольку гиперкубки в n-мерном пространстве R^n *однородны*, пространство *изотропно*, а фигура симметрична, обмен эквивалентным составом элементов не должен изменить саму фигуру (само U) и его фундаментальных свойств. Следовательно, ∀ слой из C может быть эквивалентен либо множеству слоёв в A либо всему этому множеству – всё зависит от соотношения мощностей подмножеств |Si| и |A|.

Известно, что если на некотором множестве A определено отношение эквивалентности, то существует такое разбиение множества A на непустые подмножества, при котором каждый класс разбиения состоит из всех попарно сравнимых элементов. Обратно, для любого разбиения A на непересекающиеся непустые классы существует такое отношение эквивалентности на A, что классы разбиения будут классами попарно сравнимых элементов [3].

∀ слой S_i из U может быть разбит на попарно непересекающиеся классы d – соответствующих размерностей *p*:

$$S = \cup \, d_i \ \forall \ i \neq j \ d_i \cap d_j = \varnothing \ , \qquad (5)$$

где в качестве класса выступает уже знакомый параллелепипед $d_i = i^p \ 1^{n-p}$, при этом мощность этого подмножества равна соответствующему биномиальному коэффициенту. Поскольку все слои имеют один и тот же набор классов, можно составить таблицу соответствия для отношения G как на рисунке ниже:

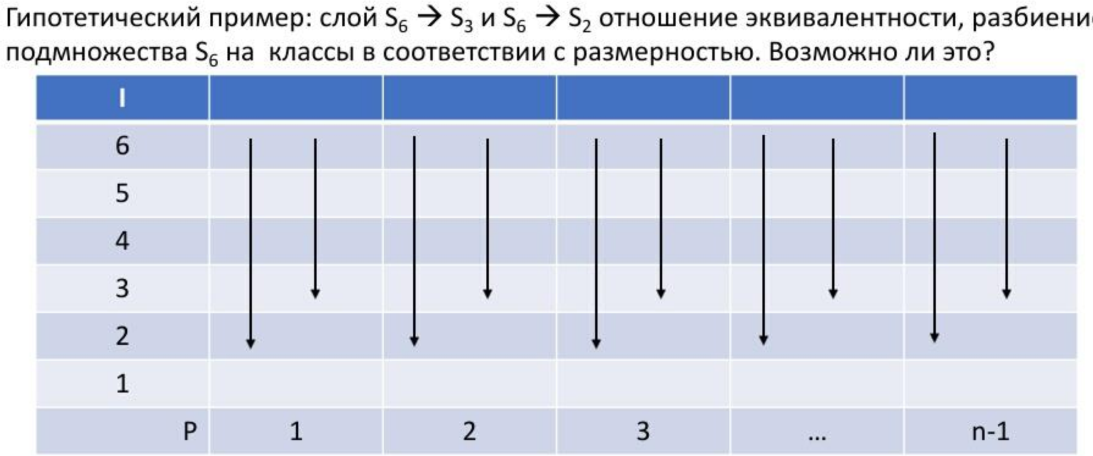

Рис. 4. Схематическое представление классов разбиения подмножеств A и C. По вертикали – слои S, нумерация от центра координат к периферии фигуры. По горизонтали – классы размерности *p* в диапазоне от 1 до n -1.

Выше приведены множество классов попарно сравнимых элементов или фактор-множества для A, C по отношению эквивалентности G, а именно: A/G и C/G. Два элемента сравнимы тогда и только тогда, когда они принадлежат к одному классу – сравнения между слоями возможны только по классам $d^p = i^p\, 1^{n-p}$.

Если функция A = G(C) существует, то она должна оперировать с попарно сравнимыми элементами отдельно по каждому классу разбиения подмножеств A и C. Поскольку мощность каждого следующего слоя больше предыдущего (2), для обеспечения эквивалентности $Sj \in A$ потребуется несколько слоёв для $\forall\, Si \in C$. Исходя из условия сохранения свойства симметричности фигуры необходимо обеспечить равенство $|S_i| = |S_j| + |S_k| + \dots$ – целое число слоев. Слои j, k должны следовать непрерывно, чтобы сохранить свойство непрерывности фигуры. Напомним, что мощность S – это число гиперкубиков в слое, то есть его объём в R^n. Из рисунка 4 легко понять, что обеспечить одновременное соответствие элементов слоя больше, чем по одному классу невозможно. Все классы имеют разные размерности *одного и того же ребра* параллелепипеда i^p, сомножитель 1^{n-p} можно отбросить как безразмерный коэффициент в силу рассуждений выше, и поэтому равенство по одному классу исключает равенство по-другому. Следовательно, для n = 2, где отношение y =G(x) ограничивается только на классе одномерных рёбер, Пифагоровы тройки существуют, а для n =3, где отношение эквивалентности работают на классах граней и рёбер одновременно – нет. Аналогичный вывод о невозможности отношения эквивалентности A = G(C) имеет место и для n-мерного случая, где сравнивается элементы из классов общим числом n-1. Это значит, что искомой функции G не существует, что $|A| \neq |C|$ арифметические операция с объёмами V_A и V_c недопустимы в силу отсутствия отношений эквивалентности (лишено смысла сравнение неоднородных объектов) – теорема Ферма доказана.

С позиции аналитической геометрии

Помимо доказательства в терминах теории множеств, изложим основные моменты доказательства с позиции аналитической геометрии и физике – это позволит получить более наглядное представление. Отношение эквивалентности y = G(x) с точки зрения физики – это, например, принцип несжимаемости объёма жидких и твёрдых тел и закон сохранения массы вещества при химических реакциях.

Легко убедиться, что при n > 2 объёмов множества слоёв гиперкубов вписанных друг в друга в уравнении Ферма: $a^n = c^n - b^n$ или условие $V_A = V_B$ (см. 3), и свойство симметрии фигуры в пространстве целых чисел взаимно исключают друг друга.

Поскольку центры каждого из созданных гиперкубов совпадают с началом координат, в силу принципа изотропности n – мерного пространства и очевидной симметрии гиперкуба, можно эти гиперкубы рассечь на 2n правильные гиперпирамиды, боковые грани которых образуются путём проведения двумерных плоскостей через центр координат и каждой пары соседних вершин гиперкуба. Рёбрами гиперпирамид будут являться 2^n прямых линий, описываемых уравнениями:

$$\frac{x_1}{\pm 1} = \frac{x_2}{\pm 1} = \ldots \frac{x_n}{\pm 1}, \qquad (6)$$

где в знаменателе коэфф. принимают значения -1 или 1.

Они соединяют начало координат с двумя смежными вершинами гиперкуба (всего их также 2^n), каждого слоя S_i в силу симметрии фигуры и принципа изотропности пространства. (Через три этих точки можно провести лишь одну двумерную плоскость.) Отрезок из центра координат, перпендикулярен гиперплоскости размерности *n-1*, упирается в центр грани гиперкуба и является высотой гиперпирамиды.

Равенство объёмов подмножеств равносильно утверждению о том, что ∃ отношение y= G(x) имеющее свойство *эквивалентности*: рефлексивности, симметричности, транзитивности над множеством U. Каждому гиперкубику x из подмножества A соответствует гиперкубик в C и наоборот. Евклидова геометрия и R^n постулирует однородность пространства: все гиперкубики в множестве U эквивалентны. Вместе с тем, слои являются *однородными* для случая двумерного пространства и *неоднородными* для $n \geq 3$ в n- мерном пространстве целых чисел Z^n. Этот нетривиальный вывод легко получить из свойства конгруэнтности: одна n-мерная фигура конкруэнтна другой тогда и только тогда, когда конгруэнтны все образующие фигуру элементы младших размерностей. Для гиперкуба это налагает требование конгруэнтности каждой гиперграни размерности p, где p – целое, пробегающее значение от 1 до n-1. Говоря проще, два куба равны между собой, если и только если, равны все грани, рёбра младших размерностей. (Вспомним, что два элемента сравнимы, когда они принадлежат одному классу.)

Внимательный взгляд на сечение вложенных друг в друга гиперкубов, образуемых на основе ряда натуральных чисел, показывает, что каждый слой является *уникальным* в том смысле, что $S_j = S_k \Leftrightarrow j = k$. Слои были бы подобны друг другу лишь в том случае, когда все их линейные размеры возрастали бы в равной пропорции по мере отдаления от начала координат и увеличения ребра i. Но толщины слоёв остаются постоянными, из чего следует: слои *изоморфны*, но не подобны друг другу. Поэтому ∄ α такого чтобы геометрические фигуры были связаны коэффициентом подобия: $S_j = \alpha S_k$. (Вместе с тем ∃ β для выражения соотношения объёмов $V(Sj) = \beta V(Sk)$.)

«Уникальность» слоя может быть сформирована условием: ∄ натуральных i, j, k при которых $V(S_i) = V(S_j) \pm V(S_k)$. Объемы слоёв не обладают свойством *аддитивности* – это ещё одно свидетельство в пользу отсутствия отношении эквивалентности слоёв. В формуле (2), переписанной в выражении объёмов:

$$1^n + V(S_1) + V(S_2)\ldots +V(S_k) = V(S_{k+l+1}) + \ldots +V(S_{k+1+m}), \qquad (7)$$

исключаются операции по сокращению объёмов слоев (за счёт арифметических операций с переносом в другую часть уравнения) в подмножествах А и С, как необходимого условия обеспечения равенства $V_A = V_C$ в рассматриваемой фигуре. Легко рассчитать, что объёмы 1^n, равно как и 2^n несравнимо меньше разности любых слоев [4], а это значит, что гиперкубик в начале координат не сможет нивелировать дисбаланс в объёме слоёв подмножеств А, С, т.е. расчет на «счастливый случай» когда каждый слой в С не находит эквивалентности в А, но все вместе слои в С будут эквивалентны А, не проходит. Кроме того, такой гипотетический счастливый случай стал бы зависеть от масштаба q, а это недопустимо.

В самом деле, равенство объёмов в левой и правой части уравнения Ферма: $a^n = c^n – b^n$ означает возможность сопоставления однородных элементарных *гиберкубиков* между разными частями фигуры $V_A = V_C$. В силу свойства симметричности фигуры и равенства объёмов, допустимы операции перемещения, обмена, вытеснения путем замены на эквивалентные элементы в слоях Si из C в Sj в A подмножества и наоборот. Это является физической имплементацией отношения эквивалентности G.

Между тем, для обеспечения симметричности фигуры один или множество слоёв из подмножества С должен / должны последовательно уложиться целое число раз в подножествам А и образовать целое число слоев, иначе возникнет *неустранимый дефект* симметрии фигуры в n-мерном пространстве целых чисел, обозначаемом как Z^n, разрывы в следовании слоёв также не допускаются – они следуют непрерывно. Ближайшее целое свыше единицы – это двойка. На практике оказывается, что отношение эквивалентности возможно лишь на двухмерной плосклоскости, где применима формула трапеции для расчета площади через длину серединной линии и высоту трапеции (толщину множества слоёв).

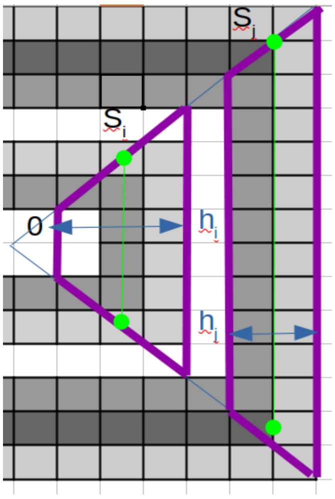

Рис. 5. Для двумерного случая n =2 объем множества слоёв рассчитывается по формуле трапеции: полусумма верхнего и нижнего основания умножить на высоту h_i и h_j соответственно

Зафиксировав в метрах размеры сравниваемых подножеств слоёв, обозначаемых через серединную линию трапеций {Si} и {Sj}, можно путем масштабирования добиться целого соотношения между высотами сравниваемых трапеций и в обратной пропорции им – толщинами анализируемых множеств слоев в нанометрах (при масштабировании $q = 2*10^9$ основания обоих трапеций становятся чётными, а серединные линии – целыми числами). Это обеспечит равенство площадей трапеций – другими словами для ∀ i, j ∃ отношение эквивалентности $G = \{(x, y) \mid x \in \{S_i\} \wedge y \in \{S_j\} : i \neq j \}$ на всем $U \setminus 1^n$, который можно рассматривать как Ø в предельном значении при $q \rightarrow \infty$: вклад в объём единичного гиперкубика стремится к нулю.

Вместе с тем, для $n \geq 3$ условие симметричности фигуры в Z^n предполагает решение системы уравнений для всех элементов младших размерностей гиперкуба p: n-1, n-2 …. – для каждого класса отдельно, а именно:

$$j^{n-1} = k^{n-1} + (k-1)^{n-1} + \ldots, \quad (8)$$

как минимум два слагаемых или более. Формула

$$j^{n-2} = k^{n-2} + (k-1)^{n-2} + \ldots,$$

как минимум два слагаемых или более.

(Эта система уравнений продолжается до вторых и первых степеней, т.е. двумерных граней и одномерных ребер.)

Где слои Sj и Sk взяты из множеств C и A соответственно. Слои в A следуют последовательно и заполняются от периферии к центру (предполагается, что элементы из A вытесняются эквивалентными элементами из C.)

Система уравнений (8) неразрешима в R при $n > 2$. Например, условие равенства суммы квадратов катетов квадрату гипотенузы и одновременно суммы длин катетов самой гипотенузе прямоугольного треугольника выполняется лишь в том случае, когда длина хотя бы одного из катетов равна нулю. Поэтому не существует действительных чисел, удовлетворяющих системе уравнений для $n = 3$ (легко понять что для $n \geq 3$, одновременное сопоставление сумм объёмов гиперкубов и (гипер)площадей их проекций на гиперплоскость размерности n-1, приводит к необходимому условию равенства высот каждого рассматриваемого параллелепипеда, но кубы j, k, k-1 имеют разные рёбра – высоты). Следовательно, никакое изменение масштаба координат пространства не обеспечит свойства симметричности фигуры, когда: *один или множество слоёв из подмножества C должен / должны уложиться целое число раз (равносильно: рациональное число за счёт смены масштаба) в подножестве A*.

Легко добиться равенства объёмов $V_A = V_C$, нарушив симметрию фигуры, непрерывность следования слоёв. Для случая $n > 2$ слои гиперкуба можно лишь упорядочить: по линейной цепочке (2), но арифметические операции причиняют геометрии фигуры неустранимый дефект: лишь наибольший элемент в линейно возрастающей цепочке слоев в U может быть добавлен или удалён как одно целое, но не более того. Все остальные операции разрушают симметричность фигуры в пространстве целых чисел Z^n. Теорема Ферма может быть доказана лишь путём внимательного наблюдения за *неоднородностью* слоёв единичной толщины в пространстве целых чисел, размерностью более трёх, каждый из которых *уникален*. Арифметические операции над объёмами слоёв гиперкуба в целых числах при $n \geq 3$ не допустимы без разрушения слоя, как геометрической фигуры и причинения неустранимого дефекта симметрии фигуры в Z^n.

В продолжение иллюстрации наглядного доказательства Великой теоремы, обратимся к интересному явлению, заключающемуся в изоморфизме слоя

(4) дефектному кубу 2^n -1 – фигуре с отсутствующей вершиной, которая *безразлична* к любым преобразованиям, т.е имеет *неустранимый дефект* и размерность n-1 в пространстве Z^n. Формула слоя (4) и формула $(1+1)^n – 1$, разложенная в ряд по биноминальным коэффициентам, будут идентичны. Переходя к системе гиперкубов с общей вершиной в начале координат и применяя масштабирование, легко понять, что в этой системе, где рассматривается например гиперквадрант лишь неотрицательных значений, слой имеет неустранимый дефект симметрии, равно как и фигура, соответствующая выражению a^n -1. Последнее возникает при разложении по биноминальным коэфф. разницы слоя и дефектного куба 2^n -1 (Иногда ошибочно полагают см [5; 6], что симметрию можно восстановить за счёт отражения от плоскостей, перпендикулярных осям, но дефект проявится в *разрыве слоёв*, в образовании пустот, что вступает в конфликт с фундаментальными свойствами рассматриваемой фигуры.)

Также легко убедиться, что разница слоёв Si – Sj – Sk, разложенная в ряд по биноминальным коэффициентам, содержит выражения в виде разницы многомерных параллелепипедов вида 1^{n-p} $(i^p – j^{p\,–}\,k^p)$, где размерность p пробегает диапазон от 0 до n-1, умноженных на биномиальный коэффициент, т. е идентична формуле слоя (4). Поскольку тождественность выполняется для каждой размерности *отдельно*, из этого следует, что объёмы слоёв могут находится в соотношении эквивалентности Si = Sj + Sk тогда и только тогда, когда обеспечивается равенство $i^p = j^{p\,+}\,k^p$ гиперкубов одновременно для всех p от 1 до n-1, другими словами, Пифагоровы тройки возможны на плоскости, где сравниваются лишь одномерные рёбра, но заведомо невозможны при n > 2.

Следующие аргументы в пользу доказательства теоремы Ферма касается только случая $n \geq 3$, фигуры, описываемые выражениями: 2^n-1, a^n -1, $c^n – b^n$ в пространстве Z^n объединяет общее: неустранимый дефект симметрии/непрерывности и размерность таких фигур равна *n – 1*. В выражении (1) слева a^n – это симметричный гиперкуб размерности *n*, справа $c^n – b^n$ в пространстве Z^n. Нельзя сравнивать литры с квадратными дюймами. Что можно сказать о неком геометрическом объекте, относительно фундаментальных свойств которого даются взаимоисключающие утверждения? По правилу логики, исключающего третьего такого объекта не существует, – нет тройки целых чисел, удовлетворяющей выражению Великой Теоремы Ферма при n > 2.

По словам Альберта Эйнштейна «фактов в жизни предостаточно – не хватает лишь немного фантазии». Междисциплинарный подход позволил отыскать креативное доказательство, основные идеи которого можно разместить как на *широких полях Диофантовой математики,* по выражению Пьера де Ферма, так и на гранях обычного деревянного кубика.

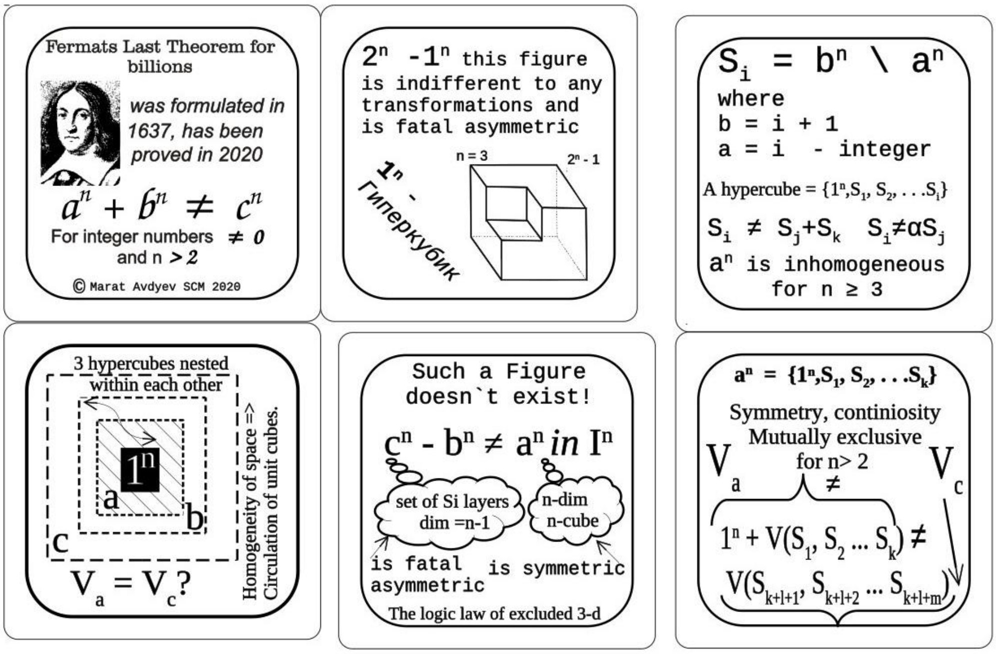

Рис. 6. Развёртка куба с доказательством Великой Теоремы Ферма

Список литературы

1. Авдыев М.А. // Обучение и воспитание детей и подростков: от теории к практике: коллективная монография / отв. ред. А.Ю. Нагорнова. – Ульяновск: Зебра, 2020. – С. 330–348 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://yadi.sk/i/WegCuVdJ6ujvDQ (дата обращения:11.06.2020).

2. Коновко А.В. Великая теорема Ферма доказана или нет? // Новости науки и техники / Академия государственной противопожарной службы МЧС России. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://cyberleninka.ru/article/n/velikaya-teorema-ferma-dokazana-ili-net/viewer (дата обращения: 18.05.2020).

3. Белова Л.Ю. Элементы теории множеств и математической логики // Теория и задачи: учебное пособие / Ярославский госуниверситет. – 2012 – С. 26–27. – ISBN 978–5-8397–0878

4. Avdyev M. Fermat's Last Theorem on the faces of wooden made cube // Роль инноваций в трансформации и устойчивом развитии современной науки / коллектив авторов (Омск, 03 июня 2020 г.). – Стерлитамак: АМИ, 2020. – С. 20 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://yadi.sk/i/1UV6gKV1uhdTZA (дата обращения: 11.06.2020).

5. Смотрите полемику, презентацию, видеоклипы вебинара по теме публикации [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://emediator.ru/index.php/foundation/discovery ссылка доступна (дата обращения: 19.05.2020).

6. Avdyev M. Fermat's Last Theorem form the Eye of Physicist // Вопросы науки и практики – 2020: 2 сессия: сборник статей V Международной научно-практической конференции (Москва, 15 мая 2020 г.). – 2020. – ISBN 978–5-6044784–1-7.

References

1. Avdyev, M. A. (2020). Obuchenie i vospitanie detei i podrostkov: ot teorii k praktike: kollektivnaia monografiia, 330-348. Ul'ianovsk: Zebra. Retrieved from https://yadi.sk/i/WegCuVdJ6ujvDQ

2. Konovko, A. V. Velikaia teorema Ferma dokazana ili net?. Novosti nauki i tekhniki. Retrieved from https://cyberleninka.ru/article/n/velikaya-teorema-ferma-dokazana-ili-net/viewer

3. Belova, L. Iu. (2012). Elementy teorii mnozhestv i matematicheskoi logiki. Teoriia i zadachi: uchebnoe posobie, S. 26.

4. Avdyev, M. (2020). Fermat's Last Theorem on the faces of wooden made cube. Rol' innovatsii v transformatsii i ustoichivom razvitii sovremennoi nauki, 20. Sterlitamak: AMI. Retrieved from https://yadi.sk/i/1UV6gKV1uhdTZA

5. Smotrite polemiku, prezentatsiiu, videoklipy vebinara po teme publikatsii. Retrieved from https://emediator.ru/index.php/foundation/discovery

6. Avdyev, M. (2020). Fermat's Last Theorem form the Eye of Physicist. Voprosy nauki i praktiki, prakticheskoi konferentsii (Moskva, 15 maia g.), (15).

Авдыев Марат Александрович – директор Союза «Сибирский Центр медиации», Новосибирск, Россия.

Avdyev Marat Aleksandrovich – head of The “Siberian Center for Mediation” Union, Novosibirsk, Russia.
