УДК 514

DOI 10.21661/r-551656

В.Д. Чемерис, И.А Чемерис

ПРЯМОУГОЛЬНИКИ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО ПРОТИВОРЕЧАТ IV ПОСТУЛАТУ

Аннотация: *представленную статью можно считать окончанием доказательства V постулата Евклида, но главная её задача всё же – показать, что отличие геометрии Лобачевского от геометрии Евклида гораздо существеннее, чем это принято было считать до настоящего времени.*

Ключевые слова: *прямоугольники, параллельные прямые линии, пятый постулат Евклида, геометрия Лобачевского, одиннадцатая аксиома Евклида.*

V.D. Chemeris, I.A. Chemeris

RECTANGLES IN LOBACHEVSKIAN GEOMETRY CONTRADICT EUCLID'S 4TH POSTULATE

Abstract: *this article can be considered the final proof of Euclid's 5th postulate. Nevertheless, its main purpose is to show that the difference between Lobachevskian and Euclidean geometry is much more significant than is commonly believed to date.*

Keywords: *rectangles, parallel straight lines, Euclid's fifth postulate, Lobachevskian geometry, Euclid's eleventh axiom.*

Даже элементарные фигуры в *геометрии Лобачевского* получаются крайне необычными. В треугольниках сумма углов всегда меньше 180° [5, с. 8–29], а прямоугольники с четырьмя углами невозможны. Пятиугольные, семиугольные, сто-угольные, наоборот, – обычное дело. Методика получения равносторонних прямоугольников с количеством углов, превышающим 4, была предложена нами в предыдущей статье [7, с. 60–61].

Выходит, если *геометрия Евклида* неверна, а верна *геометрия Лобачевского*, то могут существовать прямоугольники с любым количеством углов, начиная с 5.

Нам для достижения поставленной цели потребуется пятиугольный прямоугольник. Обозначим его вершины: *A*, *B*, *C*, *D* и *E* (рис. *а*).

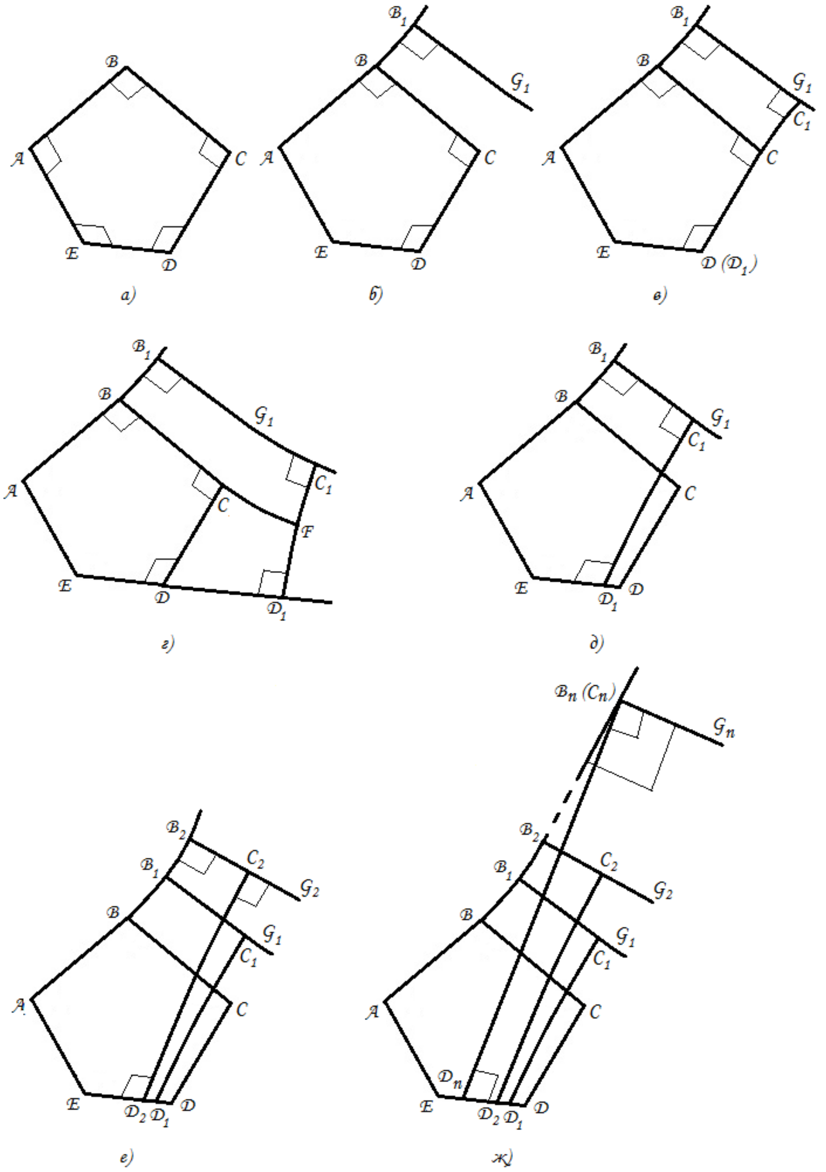

Рис. 1. Пятиугольные прямоугольники геометрии Лобачевского противоречат IV постулату Евклида

а) пятиугольный прямоугольник ABCDE; б) перпендикуляр к лучу AB; в) вариант совпадения общего перпендикуляра C_1D_1 с CD; г) вариант прохождения общего перпендикуляра C_1D_1 правее отрезка BC; д) вариант пересечения общим перпендикуляром C_1D_1 отрезка BC; е) следующий перпендикуляр B_2G_2 к лучу AB и общий перпендикуляр C_2D_2 между B_2G_2 и DE; ж) перпендикуляр B_nG_n, у которого совпадает основание с основанием общего перпендикуляра C_nD_n.

(Все линии на схемах условно прямые.)

Продолжим луч *AB* и построим на нём перпендикуляр B_1G_1, расположенный дальше от *A*, чем *BC* (рис. *б*). Этот перпендикуляр и прямая *DE* находятся по разные стороны от прямой *BC*, и оба параллельны *BC*. Следовательно, между собой они не могут пересекаться. Можно уверенно полагать, что прямая B_1G_1 параллельна прямой *DE*.

Учитывая, что B_1G_1 параллельна *DE*, можно утверждать о существовании между ними *общего перпендикуляра* [4, с. 51]. *Общий перпендикуляр* – это перпендикуляр, образующий прямые углы с обеими параллельными линиями. В данном случае с B_1G_1 и с *DE*. Обозначим его C_1D_1.

Важно знать, где проходит перпендикуляр C_1D_1. Например, он не должен совпадать с *CD*. Иначе мы получим классический *четырёхугольный прямоугольник* BCC_1B_1 (рис. *в*) и, в силу этого, подтверждение справедливости только одной геометрии – *геометрии Евклида*.

Сумма углов в *четырёхугольном прямоугольнике* равна 360°. Четырёхугольник легко делится на два треугольника. Сумма углов каждого из полученных двух треугольников равна удвоенной величине прямого угла, так как, если бы в одном треугольнике она оказалась меньше двух прямых, то в другом она должна бы была быть больше двух прямых. Что противоречит *первой теореме Лежандра-Саккери* [2, с. 169]. А так как есть треугольники с суммой углов равной двум прямым углам, то справедлива *геометрия Евклида*. Это доказывает *вторая теорема Лежандра-Саккери*: «Если существует треугольник …, сумма внутренних углов которого равна 2*d* (*d* – величина прямого угла – пояснение авторов), то сумма внутренних углов любого треугольника … равна 2*d*» [2, с. 176]. Выражение же – сумма углов треугольника равна двум прямым углам – равносильно *V-му Постулату Евклида* [3, с. 18–19].

Итак, C_1D_1 не может совпадать с *CD*, чтобы не выходить за границы *геометрии Лобачевского*.

Можно уверенно утверждать, что C_1D_1 проходит где-то возле *CD*, так как фигура $AB_1C_1D_1E$ аналогична *ABCDE*. При этом пересечение C_1D_1 с *CD* не допустимо, так как C_1D_1 перпендикулярна *DE* и *CD* перпендикулярна *DE*. Они параллельны и, следовательно, не могут пересекаться.

Допустим тогда, что C_1D_1 находится за *CD* (Рис. *г*). В этом случае, продолжив, например, *BC* до пересечения с C_1D_1 (точка *F*), получим два четырёхугольника BB_1C_1F и CDD_1F. Общая сумма углов этих четырёхугольников 720°. Но для выполнения условий *неевклидовой геометрии* каждый четырёхугольник, как было доказано немного выше, должен быть меньше 360°, то есть сумма всех углов никак не может быть равной 720°. Она должна быть меньше этой величины. Вывод. Второй вариант тоже не приемлем для *геометрии Лобачевского*.

Из всех возможных вариантов кажется только один непротиворечащим *геометрии Лобачевского – общий перпендикуляр* C_1D_1 пересекает отрезок *BC* (рис. *д*). Но это только на первый взгляд.

Построим перпендикуляр B_2G_2, ещё более удалённый от *A* (рис. *е*). Он, по аналогичным причинам, как и B_1G_1, тоже параллелен *DE*. Это значит, что между B_2G_2 и *DE* обязательно должен быть *общий перпендикуляр*. *Общий перпендикуляр* C_2D_2 должен оказаться ещё ближе к *AB*, чем C_1D_1. В перспективе – чем дальше будет основание перпендикуляра B_mG_m, от *A*, тем ближе окажется *общий перпендикуляр* C_mD_m к *AB*. Заметим, что удалённость перпендикуляра B_mG_m от точки *A* ничем не ограничена. Это значит, что ничем не ограничено приближение *общего перпендикуляра* C_mD_m к *AB*, поэтому нам ничто не мешает найти перпендикуляр B_nG_n, имеющий *общий перпендикуляр* C_nD_n с *DE*, такой, что основание C_n *общего перпендикуляра* совпадало бы с основанием перпендикуляра B_nG_n (рис. *ж*). B_n совпадёт с C_n.

В основании любого перпендикуляра лежит прямой угол, следовательно, после построения B_nG_n и C_nD_n, будут получены прямые углы AB_nG_n и $D_nC_nG_n$, имеющие общую вершину B_n (C_n) и общую сторону B_nG_n (C_nG_n). По *IV Постулату Евклида* [6, с. 14] о равенстве прямых углов (принято считать, что *Постулат* справедлив и в *геометрии Лобачевского* [1, с. 6]) должно было получиться, что другие стороны углов тоже должны совпадать. Но на деле это не так. AB_n, ну никак не хочет совпадать с C_nD_n. Между ними лежит четырёхугольник AB_nD_nE, имеющий достаточно чёткие очертания, и что самое важное: у него есть площадь. Площадь эта не равна нулю, так как она вполне сопоставима с площадями уже других имеющихся фигур – $ABCDE$, $AB_1C_1D_1E$, $AB_2C_2D_2E$, $AB_mC_mD_mE$.

Итак, неравенство прямых углов AB_nG_n и DC_nG_n противоречит *IV Постулату Евклида*, поэтому существование фигуры AB_nD_nE и всех *пятиугольных прямоугольников* невозможно.

Но наши прямоугольники строились на утверждениях *геометрии Лобачевского* [7, с. 60–61]:

– сумма углов в треугольнике меньше 180^o [5, с. 28–29];

– сумма углов в треугольнике уменьшается с увеличением площади [4, с. 60].

Следовательно, эти утверждения тоже неверны. И в действительности оказывается, что в треугольниках сумма углов не зависят от площади треугольника, то есть углы не могут уменьшаться при увеличении площади треугольника. А так как существуют разновеликие треугольники с постоянными суммами углов, то сумма углов в треугольнике – 180^o, и справедлива *геометрия Евклида*.

До настоящего времени принято было считать, что *аксиоматики геометрий Лобачевского и Евклида* отличаются только одним *V Постулатом* (*XI-ой Аксиомой*). В действительности это отличие, надеемся мы убедительно это доказали, гораздо шире. *Геометрия Лобачевского* противоречит не *V*, а *IV Постулату Евклида*.

IV Постулат крайне прост – «И что все прямые углы равны между собой» [6, с. 14]. Даже кажется: была ли в нём необходимость? Но именно своей гениальной простотой, по нашему мнению, этот Постулат подчёркивает своё главенствующее место во всей *Евклидовой геометрии*.

Отказавшись же от него, от *IV Постулата*, можно обрести представления о пространствах, вполне возможных, но совершенно не похожих на окружающую нас Вселенную. Кстати, *геометрия Лобачевского* в открывающихся новых возможностях приобретает наконец своё законное лидирующее место, как важнейший инструмент для анализа пространств неоднородных, с хаотично изменяющимися свойствами. Обсуждение истинного места *геометрии Лобачевского* выходит за рамки этой статьи.

Пока же остановимся на том, что *V Постулат* является следствием *IV-го*, то есть из *аксиоматики* его можно без колебаний переносить в *доказательную часть геометрии Евклида* как вполне обоснованную теорему.

Список литературы

1. Атанасян Л.С. Геометрия Лобачевского / Л.С. Атанасян. – М.: Лаборатория знаний, 2017. – 467 с.

2. Бахвалов С.В. Основания геометрии (главы высшей геометрии): учебное пособие для вузов / С.В. Бахвалов, В.П. Иваницкая. – Ч. 1. – М.: Высшая школа, 1972. – 280 с.

3. Иовлев Н.Н. Введение в элементарную геометрию и тригонометрию Лобачевского / Н.Н. Иовлев; под ред. А.М. Воронца. – М.; Л.: Госиздат, 1930. – 67 с.

4. Кутузов Б.В. Геометрия Лобачевского и элементы оснований геометрии: пособие для учителей средней школы / Б.В. Кутузов. – М.: Гос. учебно-педагогическое изд-во Министерства просвещения РСФСР, 1950. – 127 с.

5. Лобачевский Н.И. Избранные труды по геометрии / Н.И. Лобачевский; под ред. П.С. Александрова, Б.Н. Делоне, П.К. Рашевского [и др.]. – М.: Изд-во Академии наук СССР, 1956. – 596 с.

6. Начала Евклида. Книги I–VI. – М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. – 447 с.

7. Чемерис В.Д. Прямоугольники в геометрии Лобачевского / В.Д. Чемерис, И.А. Чемерис // Интерактивная наука. – 2020. – №5 (51). – С. 60–61.

References

1. Atanasian, L. S. (2017). Geometriia Lobachevskogo., 467. M.: Laboratoriia znanii.

2. Bakhvalov, S. V., & Ivanitskaia, V. P. (1972). Osnovaniia geometrii (glavy vysshei geometrii)., 280. M.: Vysshaia shkola.

3. Iovlev, N. N. (1930). Vvedenie v elementarnuiu geometriiu i trigonometriiu Lobachevskogo., 67. M.; L.: Gosizdat.

4. Kutuzov, B. V. (1950). Geometriia Lobachevskogo i elementy osnovanii geometrii., 127. M.: Gos. uchebno-pedagogicheskoe izd-vo Ministerstva prosveshcheniia RSFSR.

5. Lobachevskii, N. I. (1956). Izbrannye trudy po geometrii., 596. M.: Izd-vo Akademii nauk SSSR.

6. (1948). Nachala Evklida. Knigi I-VI., 447. M.: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoi literatury; L.

7. Chemeris, V. D., & Chemeris, I. A. (2020). Rectangles in Lobachevsky Geometry. Interactive science, 5 (51), 60-61.

Чемерис Владимир Дмитриевич – магистр, инженер, Екатеринбург, Россия.

Chemeris Vladimir Dmitrievich – master of engineering sciences, engineer, Ekaterinburg, Russia.

Чемерис Илья Андреевич – ученик, МАОУ «Гимназия №174», Екатеринбург, Россия.

Chemeris Ilia Andreevich – student, Gymnasium №174, Ekaterinburg, Russia.
