

УДК 51.75

DOI 10.21661/r-552020

А.В. Танюхин

**АКТУАРНАЯ ОЦЕНКА ПОЗДНИХ УБЫТКОВ: МОДЕЛЬ ЦЕПНОЙ
ЛЕСТНИЦЫ ИЛИ ОБОБЩЕННАЯ ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ
НОРМИРОВАННЫХ ПРИРАЩЕНИЙ УБЫТКОВ,
ИМЕЮЩИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА?**

Аннотация: статья акцентирует внимание на равенстве оцениваемых поздних убытков в результате применения модели цепной лестницы оценкам, полученным на основе инкрементального треугольника развития путем перекрестной параметризации нормированных приращений убытков, имеющих распределения Пуассона, с применением обобщенной линейной модели. Автором выводятся формулы модели цепной лестницы путем решения задачи перекрестной параметризации нормированных приращений убытков. В работе делаются выводы о возможных базисах распределения резервов по более мелким учетным группам нежели риск, по которому формируется треугольник развития. Данная проблематика может быть актуальной в целях дальнейшего исчисления актуарных тарифов.

Ключевые слова: актуарные расчеты, резерв убытков, поздние убытки, цепная лестница, распределение Пуассона, нормированные приращения убытков, обобщенная линейная модель, перекрестная параметризация.

A.V. Tanyukhin

**ACTUARIAL EVALUATION OF LATE LOSSES: A CHAIN LADDER
MODEL OR A GENERALIZED LINEAR MODEL OF RATED LOSS
INCREMENTS WITH A POISSON DISTRIBUTION?**

Abstract: this article focuses on the equality of the estimated late losses resulting from the application of the chain ladder model to the estimates obtained on the basis of the incremental development triangle by cross-parameterizing the rated increments of losses with Poisson distributions using the generalized linear model. In this article,

the formulas of the chain ladder model are derived by solving the problem of cross parameterization of rated increments of losses. Smaller accounting groups than the risk, along which the development triangle is formed, make conclusions about the possible bases for the sharing of reserves. This issue may be relevant for the further calculation of actuarial premiums.

Keywords: *actuarial calculations, incurred but not reported, late losses, chain ladder, Poisson distribution, rated loss increments, generalized linear model, cross parameterization.*

Введение

Задача оценки к отчетной дате поздно заявляемых или поздно оплачиваемых убытков широко известна в теории и практике актуарных расчетов. Суть задачи – дать оценку сумме или количеству убытков от событий отчетного периода, которые не были заявлены или, в случае необходимости оценки неверно заявляемых убытков, не были оплачены к отчетной дате. На текущий момент ее принято решать на основе так называемого треугольника развития убытков, представленного в табл. 1.

Таблица 1

Треугольник развития убытков

Период события (i) / развития (k)	1	2	...	I-1	I
1	S ₁₁	S ₁₂	...	S _{1,I-1}	S _{1I}
2	S ₂₁	S ₂₂	...	S _{2,I-1}	
...		
I-1	S _{I-1,1}	S _{I-1,2}			
I	S _{I1}				

В табл. 1 I – это размерность треугольника развития убытков или иначе срок, в течение которых развиваются убытки от событий единичного периода (обычно, года), т.е. происходит их заявление или оплата (обычно, в годах).

Символом s_{ik} принято обозначать приращение убытков от событий периода i за период развития k (число или сумма заявлений в периоде либо число или сумма

выплат). Треугольник, составленный из таких приращений, будем называть инкрементальным. Большинство современных моделей оценки числа или суммы поздних убытков опираются именно на такой треугольник развития. Однако существует и другой вариант построения треугольника, в соответствующих ячейках которого располагаются не приращения убытка, а убыток к концу соответствующего периода развития нарастающим итогом (c_{ik}):

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^k s_{ij} \quad (1)$$

Такой треугольник будем называть кумулятивным. Одна из самых «старых» моделей оценки поздних убытков (или резерва убытков) – модель цепной лестницы, основу которой заложили еще в 1972 г. американские актуарии Борнхьюттер и Фергюсон, опирается именно на кумулятивный треугольник развития убытков [2, с.187].

Разбору этой самой цепной лестницы, популярной в практике актуарных расчетов по сей день, посвящена данная работа.

Цель работы: показать равенство оцениваемых поздних убытков в результате применения данной модели оценкам, полученным на основе инкрементального треугольника развития убытков путем перекрестной параметризации с применением обобщенной линейной модели пуассоновского экспоненциального семейства распределений.

Практическая значимость данного исследования в актуарных целях – чисто познавательная (оценки одинаковы, какую модель не применяй), однако при принятии управленческих решений другого уровня эти выводы могут оказаться полезными с точки зрения определения подхода к выбору базиса распределения поздних убытков по более мелким учетным единицам, нежели риск, по которому строился треугольник развития убытков в целях оценки.

1. Модель цепной лестницы и перекрестная параметризация приращений убытков с использованием обобщенной линейной модели

Оценка резерва на основе модели цепной лестницы осуществляется достаточно просто. Резерв описывается следующей формулой [1, с.217]:

$$\hat{R}_i = c_{i,I-i+1} (\hat{f}_{I-i+1} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{I-1} - 1)$$

где \hat{R}_i – оценка резерва убытков от событий периода i ,

$c_{i,I-i+1}$ – кумулятивный убыток от событий периода i , накопленный к концу периода развития $I - i + 1$ (крайняя правая ячейка кумулятивного треугольника развития по строке i),

\hat{f}_{I-i+1} , \hat{f}_{I-1} – оценки коэффициентов развития убытков при переходе соответственно от периодов развития $I - i + 1$, $I - 1$ к последующим периодам.

Оценка коэффициента развития, использованного в формуле (2), производится на основе кумулятивного треугольника развития убытков по следующей формуле (3) [1, с. 216]:

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} c_{ik} F_{ik}}{\sum_{i=1}^{I-k} c_{ik}} = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} c_{ik+1}}{\sum_{i=1}^{I-k} c_{ik}}, \quad (3)$$

где \hat{f}_k – оценка коэффициента развития убытков при переходе от периода развития k к последующему периоду $k + 1$,

F_{ik} – мультипликативное приращение аккумулированного уровня убытка i -го периода события при переходе от k -го к $k+1$ -му периоду развития ($F_{ik} = \frac{c_{ik+1}}{c_{ik}}$)

Перекрестная параметризация с использованием обобщенной линейной модели (ОЛМ) предполагает применение метода максимального правдоподобия для определения оценок коэффициентов ОЛМ. Предпосылкой для применения ОЛМ с логарифмической функцией связи является мультипликативная модель нормированного приращения убытка, назовем ее моделью перекрестной параметризации (4):

$$E(Z_{ik}) = bx_i^{(1-\delta_{i1})} y_k^{(1-\delta_{ik})}, \quad (4)$$

где E – оператор математического ожидания,

Z_{ik} – случайная величина нормированного на объем риска приращения убытков от событий периода i в периоде развития k ,

b – постоянный для всех периодов коэффициент мультипликативной модели, соответствующий нормированному приращению убытков в первом периоде события и первом периоде развития,

x_i – коэффициент за i -й период события,

y_k – коэффициент за k -й период развития,

δ – дельта Кронекера.

Нормированное на объем приращение убытка, наблюдаемое в треугольнике развития (Z_{ik}):

$$Z_{ik} = \frac{C_{ik}}{W_i}, \quad (5)$$

где W_i – объем риска в i -м периоде событий.

Формула (4) является исходной предпосылкой для применения метода максимального правдоподобия и инструментария оценки параметров ОЛМ. Однако, нетрудно заметить, что модель (4) легко приводится к классическому виду перекрестно параметризованного в мультипликативной форме двухфакторного тарифа (5):

$$E(Z_{ik}) = \tilde{x}_i \tilde{y}_k, \quad (5)$$

где $\tilde{x}_i = bx_i^{(1-\delta_{1i})}$,

$\tilde{y}_k = y_k^{(1-\delta_{1k})}$.

Очевидно, что оценка резерва убытков от событий периода i в данном случае определяется формулой (6):

$$\hat{R}_i = w_i (\hat{z}_{i,I-i+2} + \dots + \hat{z}_{i,I}), \quad (6)$$

где $\hat{z}_{i,I-i+2}$, $\hat{z}_{i,I}$ – оценки математических ожиданий нормированных на объем приращений убытков от событий периода i в периодах развития $I-i+2$, I соответственно.

Оценка математического ожидания нормированного на объем приращения убытков от событий периода i в периоде развития k определяется произведением оценок соответствующих параметров модели (4), полученных методом максимального правдоподобия:

$$\hat{z}_{ik} = \hat{b} \hat{x}_i^{(1-\delta_{1i})} \hat{y}_k^{(1-\delta_{1k})}. \quad (7)$$

ОЛМ с логарифмической функцией связи предполагает следующую модель математического ожидания нормированного на объем приращения убытков:

$$E(Z_{ik}) = e^{\beta + \beta_i(1-\delta_{1i}) + \beta_k(1-\delta_{1k})}, \quad (8)$$

где β , β_i , β_k – коэффициенты ОЛМ соответственно: постоянного члена, за i -й период события, за k -й период развития.

Определив параметры модели (4) как взаимно однозначные функции от коэффициентов ОЛМ, получаем формулы оценок максимального правдоподобия коэффициентов мультипликативной модели (9):

$$\hat{b} = e^{\hat{\beta}}; \hat{x}_i = e^{\hat{\beta}_i}; \hat{y}_k = e^{\hat{\beta}_k}, \quad (9)$$

где $\hat{\beta}$, $\hat{\beta}_i$, $\hat{\beta}_k$ – оценки максимального правдоподобия коэффициентов ОЛМ β , β_i , β_k соответственно.

Вычислительные алгоритмы оценки параметров ОЛМ методом максимального правдоподобия хорошо разработаны и заложены во многих статистических компьютерных программах, доступных актуарию как на платной, так и на бесплатной основах.

II. Вывод формул модели цепной лестницы из перекрестной параметризации нормированных приращений убытков, имеющих распределения пуассоновского экспоненциального семейства, с использованием обобщенной линейной модели

В данном разделе будет показано равенство оценок резервов убытков с применением модели цепной лестницы и перекрестной параметризации на основе ОЛМ пуассоновского экспоненциального семейства, которое во многом позволит понять, почему модель цепной лестницы, не учитывающая объем риска в явном виде, дает достаточно хорошие оценки резервов убытков.

Необходимо отметить, что для ОЛМ пуассоновского семейства распределений логарифмическая функция связи является канонической функцией связи. Пусть Z – дискретная случайная величина, множество значений которой некоторое подмножество множества всех неотрицательных рациональных чисел. Тогда распределение вероятности случайной величины Z , параметризованное каноническим параметром θ , определяется формулой (10):

$$p(Z = z) = \frac{1}{(wz)!} e^{w(z\theta - e^\theta)}, \quad (10)$$

где p – функция вероятности,

w – параметр веса, влияющий на размер дисперсии случайной величины Z .

Необходимо отметить, что случайная величина wZ полагается целочисленной и распределенной по Пуассону с параметром $w e^\theta$ в классическом понимании этого распределения. Множество значений Z таким образом – нормированное параметром w множество натуральных чисел, дополненное нулем. Формулу (10) без параметра веса можно встретить, например, у Йоргенсена [3, с. 52].

Именно о распределении (10) и пойдет речь везде в дальнейшем.

В терминах ОЛМ модель канонического параметра распределения случайной величины нормированного приращения убытков периода события i и периода развития k определяется так (11):

$$\theta_{ik} = \beta + \beta_i(1 - \delta_{1k}) + \beta_k(1 - \delta_{1k}). \quad (11)$$

Предполагаемая в то же время мультипликативная модель (4) может быть использована для выражения канонического параметра (12):

$$\theta_{ik} = \ln(bx_i^{1-\delta_{1i}} y_k^{(1-\delta_{1k})}). \quad (12)$$

Так как каждый параметр мультипликативной модели является взаимно однозначной функцией от соответствующего коэффициента ОЛМ (9), уравнения метода максимального правдоподобия для нахождения оценок коэффициентов ОЛМ могут быть записаны в терминах коэффициентов мультипликативной модели.

Логарифмированная функция правдоподобия для наблюдаемого треугольника развития, легко заметить из (10), имеет вид (13):

$$l = \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^{I-i+1} (w_i (z_{ik} \ln(bx_i^{(1-\delta_{1k})} y_k^{(1-\delta_{1k})}) - bx_i^{(1-\delta_{1k})}) - \ln((z_{ik} w_i)!)). \quad (13)$$

Таким образом, уравнения максимального правдоподобия (14):

$$\frac{dl}{db} = \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^{I-i+1} \left(w_i z_{ik} \frac{1}{b} - \hat{x}_i^{(1-\delta_{1i})} \hat{y}_k^{(1-\delta_{1k})} \right) = 0, \quad (14.1)$$

$$\frac{dl}{dx_i} = \sum_{k=1}^{I-i+1} w_i \left(z_{ik} \frac{1}{\hat{x}_i} - \hat{b} \hat{y}_k^{(1-\delta_{1k})} \right) = 0, i \neq 1, \quad (14.2)$$

$$\frac{dl}{dy_k} = \sum_{i=1}^{I-k+1} w_i \left(z_{ik} \frac{1}{\hat{y}_k} - \hat{b} \hat{x}_i^{(1-\delta_{1i})} \right) = 0, k \neq 1. \quad (14.3)$$

Используя (5), перепишем уравнения метода максимального правдоподобия в следующем виде (15):

$$\sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^{I-i+1} \left(s_{ik} - w_i \hat{b} \hat{x}_i^{(1-\delta_{1i})} \hat{y}_k^{(1-\delta_{1k})} \right) = 0, \quad (15.1)$$

$$\sum_{k=1}^{I-i+1} \left(s_{ik} - w_i \hat{b} \hat{x}_i^{(1-\delta_{1i})} \hat{y}_k^{(1-\delta_{1k})} \right) = 0, i \neq 1, \quad (15.2)$$

$$\sum_{k=1}^{I-i+1} \left(s_{ik} - w_i \hat{b} \hat{x}_i^{(1-\delta_{1i})} \hat{y}_k^{(1-\delta_{1k})} \right) = 0, k \neq 1. \quad (15.3)$$

Преобразуем уравнение (15.1):

$$\sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^{I-i+1} \left(s_{ik} - w_i \hat{b} \hat{x}_i^{(1-\delta_{li})} \hat{y}_k^{(1-\delta_{lk})} \right) = s_{11} - w_1 \hat{b} + \sum_{k=2}^I \left(s_{1k} - w_1 \hat{b} \hat{y}_k \right) + \sum_{i=2}^I \left(s_{i1} - w_i \hat{b} \hat{x}_i \right) + \sum_{i=2}^I \sum_{k=2}^{I-i+1} \left(s_{ik} - w_i \hat{b} \hat{x}_i^{(1-\delta_{lk})} \hat{y}_k^{(1-\delta_{lk})} \right) = 0. \quad (16)$$

Из (16), (15.2) и (15.3) несложно свести систему (15) к системе (17), предполагающую запись условий максимального правдоподобия в двух вариантах:

$$\sum_{i=1}^{I-k+1} s_{ik} = \sum_{i=1}^{I-k+1} w_i \hat{b} \hat{x}_i^{(1-\delta_{li})} \hat{y}_k^{(1-\delta_{lk})}, \quad (17.1)$$

$$\sum_{i=1}^{I-i+1} s_{ik} = \sum_{i=1}^{I-i+1} w_i \hat{b} \hat{x}_i^{(1-\delta_{li})} \hat{y}_k^{(1-\delta_{lk})}. \quad (17.2)$$

Уравнение (17.1) говорит о том, что вклад в оценку параметров модели вносит сумма по каждой строке инкрементального треугольника развития, а уравнение (17.2) о том, что сумма по каждому столбцу данного треугольника также влияет на оценку.

Кумулятивный убыток, накопленный на отчетную дату, из (17.2) равен (18):

$$c_{i,I-i+1} = \sum_{k=1}^{I-i+1} s_{ik} = \hat{b} w_i \hat{x}_i^{(1-\delta_{li})} \sum_{k=1}^{I-i+1} \hat{y}_k^{(1-\delta_{lk})}. \quad (18)$$

Резерв по модели ОЛМ Пуассона из (6) и (7) равен (19):

$$\begin{aligned} \hat{R}_i &= w_i \hat{b} \hat{x}_i^{(1-\delta_{li})} \sum_{k=I-i+2}^I \hat{y}_k^{(1-\delta_{lk})} = \\ c_{i,I-i+1} + w_i \hat{b} \hat{x}_i^{(1-\delta_{li})} \sum_{k=I-i+2}^I \hat{y}_k^{(1-\delta_{lk})} - c_{i,I-i+1} &= c_{i,I-i+1} \left(\frac{c_{i,I-i+1} + b \sum_{k=I-i+2}^I w_i x_i y_k^{(1-\delta_{lk})}}{c_{i,I-i+1}} - 1 \right) = \\ c_{i,I-i+1} \left(\frac{c_{i,I-i+1} + b w_i x_i y_{I-i+2}^{(1-\delta_{lk})}}{c_{i,I-i+1}} \cdot \frac{c_{i,I-i+1} + b \sum_{k=I-i+2}^{I-1} w_i x_i y_k^{(1-\delta_{lk})}}{c_{i,I-i+1} + b w_i x_i y_{I-i+2}^{(1-\delta_{lk})}} \cdots \frac{c_{i,I-i+1} + b \sum_{k=I-i+2}^I w_i x_i y_k^{(1-\delta_{lk})}}{c_{i,I-i+1} + b \sum_{k=I-i+2}^{I-1} w_i x_i y_k^{(1-\delta_{lk})}} - 1 \right) &= \\ c_{i,I-i+1} \left(\frac{\sum_{k=1}^{I-i+2} y_k^{(1-\delta_{lk})}}{\sum_{k=1}^{I-i+1} y_k^{(1-\delta_{lk})}} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{I-i+3} y_k^{(1-\delta_{lk})}}{\sum_{k=3}^{I-i+2} y_k^{(1-\delta_{lk})}} \cdots \frac{\sum_{k=1}^I y_k^{(1-\delta_{lk})}}{\sum_{k=1}^{I-1} y_k^{(1-\delta_{lk})}} - 1 \right). \quad (19) \end{aligned}$$

Для доказательства равенства (19) оценки резерва из (2) по модели цепной лестницы необходимо показать, что:

$$\hat{f}_{I-i+1} = \frac{\sum_{k=1}^{I-i+2} y_k^{(1-\delta_{1k})}}{\sum_{k=1}^{I-i+1} y_k^{(1-\delta_{1k})}}; \hat{f}_{I-i+2} = \frac{\sum_{k=3}^{I-i+3} y_k^{(1-\delta_{1k})}}{\sum_{k=1}^{I-i+2} y_k^{(1-\delta_{1k})}}; \dots \hat{f}_{I-1} = \frac{\sum_{k=1}^I y_k^{(1-\delta_{1k})}}{\sum_{k=1}^{I-1} y_k^{(1-\delta_{1k})}},$$

или иначе, что для любого периода развития m справедливо:

$$\hat{f}_m = \frac{\sum_{k=1}^{m+1} y_k^{(1-\delta_{1k})}}{\sum_{k=1}^m y_k^{(1-\delta_{1k})}}$$

Покажем это, используя (17.1) и (17.2):

$$\begin{aligned} \hat{f}_m &= \frac{\sum_{k=1}^{m+1} \sum_{i=1}^{I-m} S_{ik}}{\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{I-m} S_{ik}} = \frac{\sum_{k=1}^{m+1} \sum_{i=1}^{I-k+1} S_{ik} - \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{i=I-m}^{I-k+1} S_{ik}}{\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{I-k+1} S_{ik} - \sum_{k=1}^m \sum_{i=I-m}^{I-k+1} S_{ik}} = \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{m+1} \sum_{i=1}^{I-k+1} w_i b x_i^{(1-\delta_{1k})} - \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{i=I-m}^{I-k+1} w_i b x_i^{(1-\delta_{1i})} y_k^{(1-\delta_{1k})}}{\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{I-k+1} w_i b x_i^{(1-\delta_{1i})} y_k^{(1-\delta_{1k})} - \sum_{k=1}^m \sum_{i=I-m}^{I-k+1} w_i b x_i^{(1-\delta_{1i})} y_k^{(1-\delta_{1k})}} = \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{m+1} \sum_{i=1}^{I-m} w_i b x_i^{(1-\delta_{1i})} y_k^{(1-\delta_{1k})}}{\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{I-m} w_i b x_i^{(1-\delta_{1i})} y_k^{(1-\delta_{1k})}} = \frac{\sum_{k=1}^{m+1} y_k^{(1-\delta_{1k})}}{\sum_{k=1}^m y_k^{(1-\delta_{1k})}}. \end{aligned}$$

На этом цель работы достигнута, показано, что применение перекрестной параметризации на основе ОЛМ нормированного приращения убытков – случайной величины пуассоновского экспоненциального семейства – приводит к точно таким же оценкам резервов убытков или поздних убытков, что и применение модели цепной лестницы.

Выводы и заключение

В результате работы формулируется вывод, что формулы оценки резерва поздних убытков на основе модели цепной лестницы могут быть получены решением задачи перекрестной параметризации нормированных на объем риска приращений убытков с применением обобщенной линейной модели, предполагающей распределения пуассоновского экспоненциального семейства для данных приращений.

Практическое значение данного вывода заключается в нескольких моментах.

Во-первых, алгоритмы расчета параметров обобщенных линейных моделей хорошо разработаны и реализуются многими статистическими компьютерными программами.

Во-вторых, такой момент. Гипотеза, лежащая в основе модели цепной лестницы: каждый рубль кумулятивных убытков, накопленных на отчетную дату, формирует в будущем некое среднее количество убытка нарастающим итогом. Гипотеза, лежащая в основе параметризации нормированных приращений убытков: каждая единица объема риска формирует некое среднее приращение убытка в каждом будущем периоде развития. Перед менеджментом часто возникает задача распределения резерва по более мелким учетным единицам. Выбор базиса распределения зависит от угла зрения на модель резервирования. Если мышление складывается в рамках модели цепной лестницы, то распределение будет произведено пропорционально уже случившимся на отчетную дату убыткам. Если мышление складывается в рамках модели нормированных приращений убытков, то распределение будет произведено пропорционально объему риска, сосредоточенному в тех или иных учетных группах.

При этом, на субъективный взгляд автора, модель нормированных приращений убытков более правдоподобна. Ведь если мельчайшей учетной единицей является договор страхования (полис), то при «цепочно-лестничном» мышлении все поздние убытки добавятся только к тем полисам, которые уже имеют накопленные убытки на отчетную дату, а при «пуассоновском» рассмотрении проблемы резервы поздних убытков равномерно разойдутся по всем полисам, что в большей мере соответствует равновероятному происхождению поздних убытков в различных полисах.

Данная проблематика распределения резервов убытков может быть актуальна в целях дальнейшего исчисления актуарных тарифов.

Список литературы

1. Мак Т. Математика рискованого страхования / Т. Мак. – М.: Олимп-Бизнес, 2005.
2. Bornhuetter R.L., Ferguson R.E. The Actuary and IBNR. – Proceedings of the CAS, LIX, 1972. – Pp. 181–195.
3. Jorgensen B. The Theory of Dispersion Models. – Chapman&Hall, 1997.

References

1. Mak, T. (2005). Matematika riskovogo strakhovaniia. M.: Olimp-Biznes.
2. Bornhuetter, R. L., & Ferguson, R. E. (1972). The Actuary and IBNR., 181. LIX.
3. Jorgensen, B. The Theory of Dispersion Models.

Танюхин Алексей Владимирович – канд. экон. наук, актуарий, СРО «Ассоциация профессиональных актуариев», Россия, Москва.

Tanyukhin Alexey Vladimirovich – candidate of economic sciences, actuary, Self-regulatory organization for actuaries «Association of professional actuaries», Russia? Moscow.
