Павлов Андрей Валерианович
канд. физ.-мат. наук, доцент
ФГБОУ ВПО «Московский государственный
технический университет радиотехники,
электроники и автоматики»
г. Москва

DOI 10.21661/r-552977

ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ И ЛИНЕЙНЫЙ ПРОГНОЗ

Аннотация*: статья посвящена ускоренному алгоритму линейного прогноза (n+1)-ой случайной величины по первым n наблюдениям. С помощью рассмотрения нового скалярного произведения в пространстве линейной оболочки исходных n векторов ускоряется процесс нахождения такой проекции. Рассмотрен пример линейного преобразования на плоскости для симметричного случая, приводящий к возможности пользоваться ортогональностью сторон ромба при проекции на плоскость его сторон.*

Ключевые слова*: быстрый линейный прогноз, оптимальная линейная оценка, оптимальный прогноз, геометрия Лобачевского.*

Данная статья является продолжением статьи с тем же названием «Оптимальный линейный прогноз». В данной второй части другим методом доказывается теорема 1 из первой части. Доказательство и предложение 1 по мнению автора представляет отдельный интерес с точки зрения геометрии на плоскости и привлекает внимание к исследованию оптимальных линейных оценок с точки новой точки зрения ввиду необходимости согласования разных единиц длины из-за неоднозначности величин длин при изучении разных скалярных произведений в трехмерных пространствах. В статье «Оптимальный линейный прогноз» [1] кроме первого исходного произведения мы используем также второе скалярное произведение, совпадающее по определению с суммой почленного произведения координат векторов в базисе

$$x_1, x_2, e_3,$$

хотя

$$(x_1, x_2) \neq 0$$

для исходного скалярного произведения

$$\| \bar{e}_3 \| = \| \bar{x}_1 \| = \| \bar{x}_2 \| = 1, \bar{e}_3 \perp x_1, \bar{e}_3 \perp x_2$$

для обеих скалярных произведений.

Приходится предположить, что единицы измерения длин на диагонали ромба со сторонами

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2$$

разные для введенных двух метрик и несовпадают с единственной общей единицей измерения на диагоналях. Данный факт тоже невозможен с точки зрения фактов, приведенных ниже (см. также предложение 1).

Отметим очевидный факт: ортогональное преобразование, заданное матрицей

$$A = (1/\sqrt{2}) \binom{11}{1-1},$$

переводит ортогональные диагонали ромба в его стороны, которые могут быть неортогональны с точки зрения исходной метрики. Точное изложение данного факта приведено в приложении 1.

Приведем основную часть доказательства приложения 1 статьи для упрощенного случая. Матрицы перехода от базиса

$$x_1, x_2$$

к базису

$$e_1, e_2$$

задают линейное преобразование

$$B, B^{-1} = 2B, B^{\top} = B, B^{-1})^{\top} = B^{-1} = 2B$$

такое, что

$$B^{-1}B^{-1} = 2E,$$

и скалярное произведение результата преобразования сторон ромба равно

$$(x_1, x_2) = (B^{-1}e_1, B^{-1}e_2) =$$

$$e_{k1}^{\top}(B^{-1})^{\top}B^{-1}e_{k2} =$$

$$= e_{1k}^{\top} B^{-1} B^{-1} e_{2k} =$$

$$e_{1k}^{\top} 2BB^{-1} e_{2k} = 2(e_1, e_2) = 0, (B^{-1})^{\top} B^{-1} = 2E,$$

($\top$- знак транспонирования).

Если пользоваться понятием длин, то данный факт кажется неверным для исходной метрики.

Мы получили, что

$$(x_1, x_2) = (x_1, x_2)_1 = 0$$

с точки зрения преобразования координат при линейном преобразовании B.

Следующий относительно простой факт (как и теорема 1) обосновывает совпадение единиц измерения длин на сторонах и диагоналях ромба для второй метрики в симметричном случае.

Если оптимальная оценка совпадает с диагональю ромба со сторонами

$$x_1, x_2$$

то для обеих метрик имеют место равенства

$$\hat{x}_3 = c_1 x_1 + c_2 x_2 = c(x_1 + x_2), c = c_1 = c_2,$$

причем из единственности проекции следует, что константа c одна и та же для обеих скалярных произведений. При этом

$$x_3$$

совпадает с диагональю ромба.

Длина диагонали равна

$$\sqrt{2}||x_1||$$

единиц измерения при определении второй метрики

$$||(x_1 + x_2)/\sqrt{2}||_2 = \sqrt{2}||x_1||,$$

тому же самому числу эта длина равна и как результат ортогонального преобразования A:

$$A = A^{-1},$$

так как

$$Ax_1 = E_1 = (x_1 + x_2)/\sqrt{2}$$

и

$$||x_1||_2 = ||E_1||_2$$

по сохранению длин при ортогональном преобразовании A

(данный факт следует из равенства

$$(Ax_1, Ax_2) = (x_1, x_2),$$

то есть длина диагонали ромба (оптимальной оценки) равна числу

$$\sqrt{2}||x_1||_2,$$

где длина $||x_1||_2$ измерялась в единицах сторон ромба, общих для обеих метрик.

Мы получили, что с точки зрения ортогональных преобразований единицу длины во второй метрике нельзя менять на диагонали ромба.

Из предложения 1 (как и из теоремы 1,[2,3]) следует, что понятие длины оптимальной линейной оценки как вектора в трехмерном пространстве требует отдельного изучения уже и с точки зрения исходного обыкновенного скалярного произведения (из данного предложения следует, что такая длина определена неоднозначно без введения нового скалярного произведения).

ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Мы будем использовать обозначения

$$\xi = \overline{x},$$

называя случайную величину также вектором в тех случаях, когда алгебраические аналогии упрощают изложение.

По определению, величина

$$\hat{x}_3 = c_1 x_1 + c_2 x_2 = (e_1, x_3)e_1 + (e_2, x_3)e_2$$

совпадает с оптимальной линейной оценкой (проекцией) вектора

$$x_3$$

по векторам

$$x_1, x_2,$$

(e_1, e_2 получены ортогонализацией x_1, x_2),

$$\hat{x}_3 = Pr_{x_1,x_2} x_3.$$

Предложение 1.

$$x_3 = c_1 x_1 + c_2 x_2, c_1 = (x_3, x_1)/\|x_1\|^2, c_2 = (x_3, x_2)/\|x_1\|^2 .$$

Доказательство.

Рассмотрим ортогональное преобразование А, переводящее вектора

$$x_1, x_2$$

в вектора

$$E_1, E_2.$$

$$E_1 = (x_1 + x_2)/\sqrt{2}, E_2 = (x_1 - x_2)/\sqrt{2},$$

$$||E_1||_2 = ||E_2||_2 = 1, Ax_1 = E_1, Ax_2 = E_2,$$

$$A = (1/\sqrt{2})\begin{pmatrix} 11 \\ 1-1 \end{pmatrix},$$

$$A = A^{-1}, A^{\top} = A = A^{-1},$$

матрица А дана в базисе

$$x_1, x_2.$$

Здесь вектора

$$E_1, E_2$$

совпадают с диагоналями ромба со стороной

$$||x_1|| = ||x_2|| = 1, ,$$

уменьшенными в

$$\sqrt{2}$$

раз. Данные диагонали ортогональны для обеих скалярных произведений.

Обратное преобразование A^{-1} тоже ортогонально и переводит вектора на диагоналях ромба в исходные стороны ромба. Результат преобразования не зависит от скалярных произведений и переводит ортогональные в обеих метриках вектора снова в ортогональные вектора в обеих метриках:

$$A^{-1}E_1 = x_1, A^{-1}E_2 = x_2$$

матрица преобразования А рассматривается в базисе

$$x_1, x_2$$

Для второй метрики данный факт очевиден, для первого ортогонального преобразования вектора

$$x_1, x_2$$

должны быть перпендикулярны как результат скалярного произведения

$$(x_1, x_2) = (A^{-1}E_1, A^{-1}E_2) =$$

$$E^{\bullet}_{1k}(A^{-1})^{\bullet}\ A^{-1}E_{2k} = (E_1, E_2) = 0$$

Мы доказали

$$(x_1, x_2) = (x_1, x_2)_1 = 0$$

с точки зрения преобразования координат при линейном преобразовании A.

Из этого факта, как и из теоремы 1 вытекает результат статьи [1] и приложения 1.

Список литературы

1. Pavlov A.V. Optimal linear prognosis / A.V. Pavlov // International Journal of Open Information Technologies, Open Journal Systems. – 2019. – №5. – vol.8, pp. 8–12 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://injoit.org/index.php/j1/article/view/907/886

2. Pavlov A.V. Reliable filtration in the «white noise» / A.V. Pavlov // International Journal of Open Information Technologies, Open Journal Systems. – 2015. – №10. – vol.3, pp.1–5 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://injoit.org/index.php/j1/article/view/217

3. Pavlov A.V. The Worlds equalities and linear estimations for not-stationary processes/ A.V. Pavlov // International Journal of Open Information Technologies Open Journal Systems. – 2015. – №7. – vol 3. – pp.12–18 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://injoit.org/index.php/j1/article/view/217