(cc) BY

Павлов Андрей Валерианович

канд. физ.-мат. наук, доцент

ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики»

г. Москва

DOI 10.21661/r-553927

ОТРАЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ И ЛИНЕЙНЫЙ ПРОГНОЗ

***Аннотация**: доказана периодичность широкого класса функций как следствие отражения четных и произвольных регулярных функций. С помощью рассмотрения нового скалярного произведения в пространстве линейной оболочки исходных n векторов доказывается совпадение значений двух разных скалярных произведений. Рассмотрен пример линейного преобразования на плоскости для симметричного случая, приводящий к возможности пользоваться ортогональностью сторон ромба при проекции на плоскость его сторон.*

***Ключевые слова**: оптимальная линейная оценка, отражение функций, периодичность регулярных функций, геометрия Лобачевского.*

Введение

Первая часть статьи посвящена более подробному изложению краткого результата предложения 2 статьи [1]. Основной результат первой части статьи изложен в теореме 1. Из данного результата формально следуют основные результаты статей [1; 2], относящихся к преобразованию Лапласа, но тема данной статьи не имеет прямого отношения к результатам этих статей.

В качестве иллюстрации результата теоремы 1 приведем пример, доказывающий возможность периодичности функции как результат отражения ее значений относительно какой-либо точки. В примере используются определение A-симметрии: если в исходной системе координат уравнение комплексной функции равно $z = f(p)$, то уравнение $z = g(p) = f(2A - p)$ определяет симметричное отражение значений функции $f(p)$ относительно точки $B = (0, A)$ ($g(p) = f(a-(p-a))$, если $f(a+(p-a)) = f(p)$); мы будем называть данное

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

отображение А-симметрией $f_A(p)$. Если произвольную функцию $f(p)$ сначала сдвинуть на величину $2A$ вправо, а затем отразить относительно точки $(0,A)$, мы получим исходную функцию $f(-p)=f(p)$ (достаточно проследить перемещение оси $Re\,p=-A$ при таком преобразовании). Затем сдвинем получившуюся функцию снова на $2A$ вправо и отразим относительно точки $(2A,0)$; виду исходной четности результат преобразования совпадет со сдвинутой вправо на величину $2A$ функцией $f(p)$. Ввиду того, что результаты первого и второго преобразования совпадают с одной и той же функцией $f(-p)$ (достаточно заметить, что второе преобразование аналогично первому, но сдвиг и отражение происходит с удвоенным значением параметров, следовательно результат такого преобразования тоже $f(-p)$), мы получаем, что результат сдвига $f(p-2A$ совпадет с исходной функцией $f(p)$ как результат первого преобразования, то есть $f(p-2A)=f(p)$, и функция $f(p)$ стала периодичной с периодом $2A$. Данный факт иллюстрирует возможность двойной симметрии, приводящей к периодичности, которая доказана в теореме 1 без предположения четности исходной точки относительно какой-либо точки $(0,A)$. В данной теореме из существования одной А-симметрии выводится существование другой точки В-симметрии при $A\neq B$.

Вторая часть статьи посвящена изложению аналогичного факта на английском языке. Доказано совпадение двух разных скалярных произведений в пространстве векторов, приводящая к ортогональности сторон произвольного ромба с точки зрения двойного ортогонального преобразования, [3].

1. Отражение функций

В теореме 1 доказана возможность двойной симметрии регулярной функции в относительно общих условиях, наложенных на эту функцию.

Теорема 1.

Пусть функция $z=f(p)$ регулярна при всех $-4A<Re\,p<4A$, $A\in(0,\infty)$. С точки зрения разных систем координат функция $z=f(2A-p)$, определяющая А-

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

симметрию, должна получаться так же как результат B-симметрии из одного исходного регулярного в исходных координатах отображения $z = f(p)$, $B \neq A$.

Доказательство.

Если сдвинуть начало координат в точку $(-A,0)$, то уравнения исходных отображений $f(p)$ и $z = f(2A-w)$ в новых координатах совпадают с уравнениями сдвинутых направо исходными отображениями: $z = f(w-A), z = f(3A-w), w = p+A$ (с точки зрения сопоставления точек комплексной плоскости данное сопоставление осталось прежним); $z = f((4A-w)-A)$, если исходная функция $z = f(w-A)$, $B = (-2A,0)$, в новых координатах. Следовательно, в новых координатах эти две функции определяют исходное отображение и B-симметрию (симметрию в точке B). При этом значение в любой точке $W = 3A-w$ исходной функции f совпадает со значением функции $g(w)$ B-симметрии в точке w, симметричной относительно точки B, ввиду неизменности сопоставления точек, симметричных относительно B для разных систем координат. С другой стороны B-симметрия в новых координатах совпадает с D-симметрией в точке $D = (3A/2,0)$ в новых координатах в том смысле, что значение $g(w) = f(3A-w)$ (то же самое как в B-симметрии) это – значение функции $g(w)$ в точке w, симметричной относительно точки $W = 3A-w$ уже для новой точки симметрии D (по определению функции $z = f(3A-w)$ в новых координатах). Мы доказали, что исходное отображение точек плоскости является одновременно B-симметрией и D-симметрией ($B = (-2A,0), D = (3A/2,0)$ в новых координатах).

Теорема 1 доказана.

2. Геометрия на плоскости в разных масштабах (*The English variant of main result*)

The second important fact of the article is related to the orthogonal transformation on a plane:

$$A = (1/\sqrt{2})\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

where

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

$A = A^{-1} = A^{\bullet}$, $A^2 = E$;

we consider the A matrix in the x_1, x_2 basis in the symmetric situation, if $\| x_1 \| = \| x_2 \|$, and the linear optimal estimation of x_3 is $\hat{x}_3 = cQ_1, Q_1 = x_1 + x_2, c = const,$ where Q_1, Q_2 are the diagonals of rhombus with the x_1, x_2 sides. It is obviously,

$$Ax_1 = Q_1/\sqrt{2}, Ax_2 = Q_2/\sqrt{2}, A^{-1}Q_1 = x_1\sqrt{2}, A^{-1}Q_2 = x_2\sqrt{2},\ A^{-1} = A.$$

By definition, A_1 is the linear transformation with the A matrix in the x_1, x_2 basis: $A_1 x_1 = Q_1/\sqrt{2}, A_1 x_2 = Q_2/\sqrt{2}$. We use the second scalar production from the article [3], (the first scalar production is the primary production). We can use, that $(A_1x_1, A_1x_2)_2 = (A_1x_1, A_1x_2)_1$. The fact is a result of the formula

$$\begin{aligned}
&(A_1y_1, A_1y_2)_2 = (A_1(\alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2), A_1(\alpha_2 e_1 + \beta_2 e_2))_2 = \\
&= ((\alpha_1 A_1 e_1 + \beta_1 A_1 e_2), (\alpha_2 A_1 e_1 + \beta_2 A_1 e_2))_2 = \\
&= ((\alpha_1 A_1 e_1 + \beta_1 A_1 e_2), (\alpha_2 A_1 e_1 + \beta_2 A_1 e_2))_1 = (A_1 y_1, A_1 y_2)_1, \\
&\alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2 = y_1, \alpha_2 e_1 + \beta_2 e_2 = y_2, \\
&\alpha_i, \beta_i = const., e_i = x_i / \| x_i \|_1 = x_i / \| x_i \|_2, \| e_i \|_i = 1, i = 1, 2,
\end{aligned}$$

where

$$A_1 e_1 = (e_1 + e_2)/\sqrt{2}, A_1 e_2 = (e_1 - e_2)/\sqrt{2},$$

with help of $(A_1e_i, A_1e_i)_2 = 1, (A_1e_i, A_1e_i)_2 = (A_1e_i, A_1e_i)_1 = 1,$, and $\| A_1 e_i \|_2 = \| e_i \|_2 = 1$ as the result of the orthogonal transformation of the $e_1, e_2, (e_1, e_2)_2 = 0$, i=1,2 (we use, that $\| e_i \|_2 = \| e_i \|_1 = 1$ on the sides of the rhombus, and the Ae_i expression is the linear combination and does not depend on the scalar production too); $(E_i, E_j)_2 = (E_i, E_j)_1 = 0, i \neq j$, if $E_i = Ae_i$, $\| e_i \|_2 = \| e_i \|_1 = 1, i = 1, 2$, $(\| x_1 + x_2 \|_2 = \| x_1 - x_2 \|_2$, $Ex \equiv x$, for all x [3]). From $(A_1y_1, A_1y_2)_2 = (A_1y_1, A_1y_2)_1$ for all y_1, y_2 we get $0 = (x_1, x_2)_2 = (x_1, x_2)_1$ (we use $x_1 = \alpha_1 E_1 + \beta_1 E_2 = y_1, x_2 = \alpha_2 E_1 + \beta_2 E_2 = y_2$ for some constants $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2$). *The second fact* we can obtain from $0 = (A_1^2 x_1, A_1^2 x_2)_2 = (A_1 Q_1/\sqrt{2}, A_1 Q_2/\sqrt{2})_2 = (A_1 Q_1/\sqrt{2}, A_1 Q_2/\sqrt{2})_1 = (A_1^2 x_1, A_1^2 x_2)_1 = (x_1, x_2)_1$ too, where $A_1^2 = A^2 = E$ in the x_1, x_2 basis. As the result of the orthogonal A transformations

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

we get $(AQ_1, AQ_2) = (x_1, x_2) = 0$ (for both scalar productions from the first fact). It is the *second fact*. From the fact it is possible to suppose, that $(x_1, x_2) = (x_1, x_2)_1 = 0.$

Список литературы

1. Pavlov A.V. The regularity of the Laplace transform Math. Phys.and Comp. Model.Volgograd State University, 2019, 22 1, 5–11.

2. Pavlov A.V. Permutability of Cosine and Sine Fourier Transforms. Journal Moscow University Mathematics Bulletin, Springer, 2019, 74, 2, 75–78.

3. Andrey V. Pavlov. Optimal linear prognosis II. Geometry in space. Intern. Jour. of Open Information Technologies, v. 9, no.2, p. 9–13, 2021.

4. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука,1987. – 688 с.

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)