Павлов Андрей Валерианович

канд. физ.-мат. наук, доцент

ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики»

г. Москва

DOI 10.21661/r-554391

ПЕРИОДИЧНОСТЬ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

***Аннотация**: доказана периодичность аналитических в окрестности нуля функций как следствие результатов действия операторов сдвига в случае действительной на мнимой исходной функции Данный результат является следствием аналитичности некоторого поля, полученного симметричными сдвигами исходной аналитической функции.*

***Ключевые слова**: периодичность аналитических функций, сдвиги функций, совпадение аналитической функции с константой.*

Введение.

Доказана теорема 1, которая продолжает результаты статей [1,2] относительно возникновения периодичности функций на плоскости. В данной статье рассматриваются комплексные аналитические функции, которые после сдвигов на произвольную постоянную величину образуют, вообще говоря, неаналитическую функцию (некоторое поле). Доказано, что данное поле тоже можно считать аналитической функцией, которая периодична с некотором периодом 2А. Ввиду определения поля сдвигов теоремы 1 константа 2А может быть выбрана произвольной, и получившееся поле сдвигов совпадает с константой. С точки зрения аналитических продолжений данное поле сдвигов в некоторых условиях совпадает с исходной функцией. Из данного результата формально следуют основные результаты статей [1,3], относящихся к преобразованию Лапласа.

1. Операторы сдвига аналитических функций

В теореме 1 рассмотрены функции вида $f(p-2A)$ при положительных произвольных константах А>0. Значения данных функций на прямой с действительной частью, равной А образуют некоторое поле, которое, как доказано в теореме 1, является аналитической функцией в правой полуплоскости.

Теорема 1.

Пусть функция $z = f(p)$ регулярна при всех $-4A < Re\, p < 4A$, $A \in (0,\infty)$.

Как результат сдвигов функция $f(p)$ периодична с произвольным периодом 2А и аналитически продолжается в область аналитичности функции

$f(p) = f(p-2A), a \in (0,+\infty).$

Доказательство.

Рассмотрим значения произвольной сдвинутой на величину 2А вправо функции $f(p)$ на прямой

$\mathrm{Re}\, p = A, A \in (0,+\infty).$

Данные значения совпадают со значениями функции $f(p-2A)$ на данной прямой, и получились как результат сдвига значений исходной функции $f(p)$ с прямой

$\mathrm{Re}\, p = -A$

на величину 2А направо. В случае действительной на комплексной оси функции $f(p)$ значения функций $f(p)$ и

$f(p-2A)$

сопряжены по теореме Римана о продолжении через действительную ось, [22]:

$f(z) = \overline{g(z)}, z \in l_A = \{z : \mathrm{Re}\, z = A\}, g(z) = f(p-2A).$

Рассмотрим при всех положительных действительных А вообще говоря неаналитическую функцию (поле) $g(p)$, значения которой на прямой l_A совпадают со значениями функции $f(p-2A)$ на этой прямой, причем данные значения не продолжаются аналитически с данных прямых при разных А. Из равенства

$f(z) = \overline{g(z)}$

при всех комплексных z в правой полуплоскости следует, что

$f(z) = u + iv = U - iV, g(z) = U + iV,$

и, как результат сдвигов на 2А, взятых в точках на прямой $\mathrm{Re}\, p = A,$

величины действительной и мнимой части g(z) совпадают с

$U(x,y) = U(x-2A,y)|_{x=X=A},$
$V(x,y) = V(x-2A,y)|_{x=X=A}, y \in (-\infty,\infty), g(z) = U + iV.$

Зафиксируем какую-либо из сдвинутых функций $f(p-2B) = G(p)$ (ее значения совпадают со значениями исходной функции на прямой $l_{-B}, B > 0.$ Все остальные сдвинутые на величину 2А функции $f(p-2A)$ получаются из $G(p)$ при $A > B$ как результат сдвига $G(p)$ на величину $2(A-B)$; значения этих функций на прямой $\operatorname{Re} p = A$ совпадают со значениями на этой прямой сдвинутой функции

$G(p-2D), D = A-B.$

Следовательно, выполнены равенства

$U(x,y) = U_0(x-2D,y)|_{x=A},$
$V(x,y) = V_0(x-2D,y)|_{x=A},$
$y \in (-\infty,\infty), G(z) = U_0(x,y) + iV_0(x,y), x = B.$

сразу для всех

$\operatorname{Re} p > B > 0, p = x+iy, D = A-B > 0, B > 0.$

Так как действительные части аналитической функции $f(z)$ и поля $g(z)$ совпадают, а мнимые части отличаются только знаком во всей правой полуплоскости, то мы получаем, что аналогичные равенства выполнены для функции f(z):

$u(x,y) = u_0(x-2D,y)|_{x=A}, u = U_0,$
$v(x,y) = v_0(x-2D,y)|_{x=A}, v = -V_0, y \in (-\infty,\infty);$
$f(z) = u_0(x,y) + iv_0(x,y), p = x+iy \in \operatorname{Re} p = B.$

Мы доказали, что аналитическая в области $\operatorname{Re} p > B > 0$ функция совпадает с полем сдвигов функции G(p), [3–5]. Так как G(p)=g(p) на прямой $\operatorname{Re} p = B$, то формально, мы доказали, что поле сдвигов g(p) является аналитической в правой полуплоскости функцией (ввиду произвольности выбора B>0). Данный факт эквивалентен утверждению теоремы 1 при произвольном А.

Список литературы

1. Pavlov A.V. The regularity of the Laplace transform Math. Phys.and Comp. Model.Volgograd State University, 2019, 22 1, 5–11.

2. Павлов А.В. Геометрия на плоскости и линейный прогноз / А.В. Павлов // Новое слово в науке: стратегии развития: материалы XIV Междунар. науч.-

практ. конф. (Чебоксары, 30 дек. 2020 г.). – Чебоксары: ЦНС «Интерактив плюс», 2020.

3. Pavlov A.V. Permutability of Cosine and Sine Fourier Transforms. Journal Moscow University Mathematics Bulletin, Springer, 2019, 74, 2, 75–78.

4. Andrey V. Pavlov. Optimal linear prognosis II. Geometry in space. Intern. Jour. of Open Information Technologies, v. 9, no.2, p. 9–13, 2021.

5. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат – М.: Наука,1987, – 688 с.