Братков Илья Дмитриевич

кадет

ФГКОУ «Ставропольское президентское кадетское училище»

г. Ставрополь, Ставропольский край

ГРАФИЧЕСКАЯ (ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ) ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

***Аннотация**: в статье рассматриваются основные этапы для графической интерпретации комплексных чисел: простейшие построения в комплексной плоскости; доказательство теорем элементарной геометрии; геометрическая интерпретация при решении уравнений; применение прикладных компьютерных программ.*

***Ключевые слова**: комплексные числа, комплексная плоскость, геометрическая интерпретация комплексных чисел, решение уравнений в комплексных числах, прикладные программы для геометрической интерпретации.*

Комплексные числа могут быть представлены различными формами: алгебраическая, тригонометрическая и показательная. Каждая из названных форм имеет свои особенности и области применения. Меня наиболее заинтересовала геометрическая интерпретация всех этих форм работы с комплексными числами, так как в этом случае можно использовать больше наглядности при изучении свойств и выполнении операций с комплексными числами. Существует много способов решения задач по планиметрии, но некоторые из них можно просто, наглядно и рационально решать при помощи комплексных чисел. В результате такого решения нередко обнаруживаются новые детали, удается сделать более общие выводы, внести уточнения в формулы и соотношения, по-новому доказать известные факты и теоремы.

Графическая интерпретация комплексных чисел во многом связана с координатной плоскостью и векторами, но имеет свои особенности.

Для графической интерпретации комплексных чисел нужно последовательно пройти несколько основных этапов: понять, как работать с комплексной плоскостью; построить в комплексной плоскости различные основные геометрические объекты; доказать несколько теорем элементарной геометрии с использованием комплексной плоскости; показать возможности геометрической интерпретации при решении уравнений в комплексных числах; использовать прикладные графические математические программы для геометрической интерпретации комплексных чисел.

Теперь кратко пройдем по каждому из обозначенных этапов.

Для геометрической интерпретации комплексных чисел используется комплексная плоскость, которая представляет собой прямоугольную систему координат, где действительная часть отображается на оси Ox – действительной оси, а мнимая часть – на оси Oy – мнимой оси.

В комплексной плоскости любое число, записанное в алгебраической форме $z = a + ib$, можно изображать вектором с началом в точке O (0; 0), тогда длина вектора z равна $|z|$ и справедливы неравенства $|a| \leq |z|, |b| \leq |z|$, а так же $|Re\ z| \leq |z|, |Im\ z| \leq |z|$. Расположение комплексно сопряженных чисел при этом будет симметрично относительно действительной оси Ox (рисунок 1).

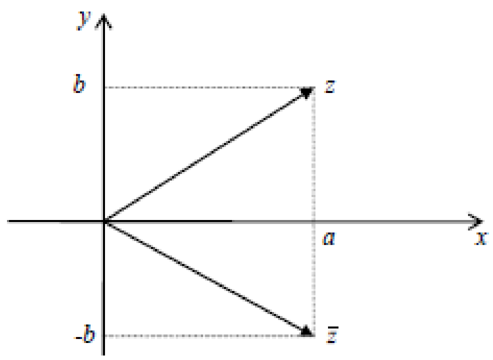

Рис. 1. Комплексно-сопряженные числа

Так как каждое комплексное число можно представить в виде вектора, то так же по правилам векторов изображается сумма и разность комплексных чисел. На рисунке 2 сумма комплексных чисел производится по правилу параллелограмма, а разность – по правилу треугольника для векторов.

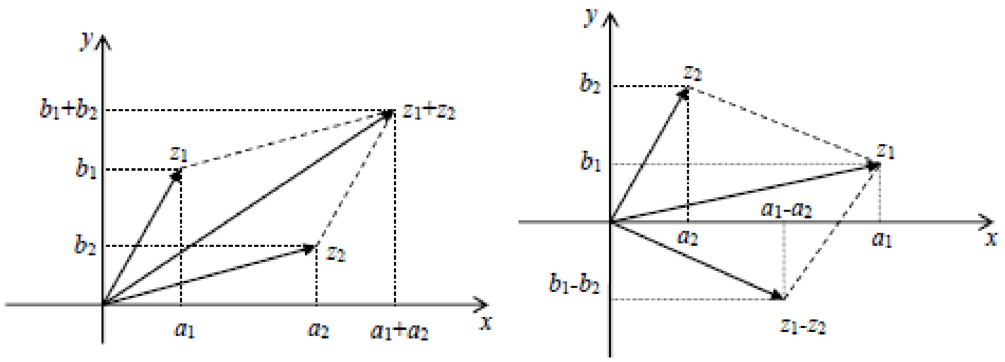

Рис. 2. Сумма и разность комплексных чисел

Следующий этап работы с комплексной плоскостью – это понимать, как изображать разные объекты элементарной геометрии, а затем уже переходить к доказательству теорем. Например, построить в комплексной плоскости множество точек $z = x + y \cdot i$, удовлетворяющих условию: $|z - i| = 1$.

Для каждой точки $z = x + y \cdot i$ число $|z - i|$ равно расстоянию между точкой z и точкой i. Тогда заданному условию $|z - i| = 1$ удовлетворяют только те точки плоскости, которые лежат на окружности радиуса 1 и с центром в точке (0; 1), окружность построена на рисунке 3.

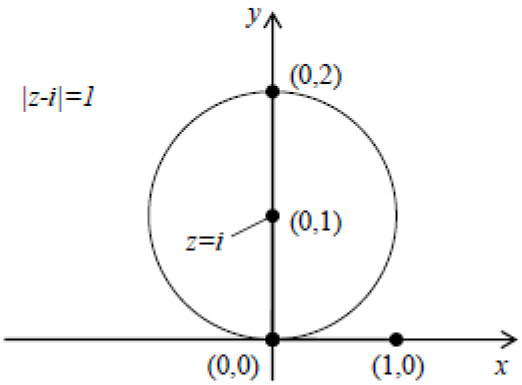

Рис. 3. Окружность

Покажу, как на языке комплексных чисел можно доказать некоторые основные факты планиметрии. Например, что сумма квадратов длин диагоналей ромба равна сумме квадратов длин всех его сторон (рисунок 4).

Это же доказательство можно провести и аналитически.

Пусть $|z_1| = |z_2| = c$. Доказать, что $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 4c^2$. Так как $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$, то $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2) \cdot \overline{(z_1 + z_2)} + (z_1 - z_2) \cdot$

$\overline{(z_1 - z_2)} = (z_1 + z_2) \cdot (\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2) \cdot (\overline{z_1} - \overline{z_2}) = z_1 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} + (z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1}) + z_1 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} - (z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1}) = 2 \cdot |z_1|^2 + 2 \cdot |z_2|^2 = 4c^2$

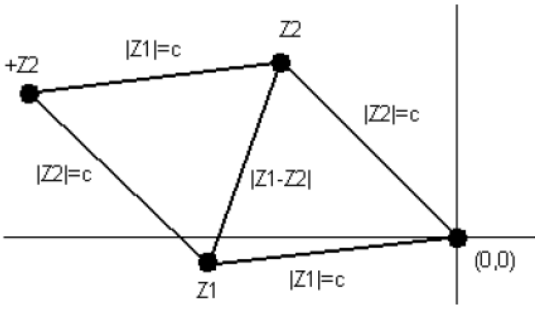

Рис. 4. Свойства ромба

Аналогично можно доказать и другие теоремы, например, теорему Птоломея: произведение длин диагоналей выпуклого вписанного в окружность четырехугольника равно сумме попарных произведений длин его противолежащих сторон.

Геометрическая интерпретация используется так же и для решения уравнений в комплексных числах.

Например: найти все корни уравнения $z^4 = 1 + i$.

Решение: четыре корня этого уравнения можно найти алгебраическими методами с использованием тригонометрической формы записи комплексных чисел. При этом решения определяются формулой $z_k = \sqrt[8]{2} \cdot e^{i\,\varphi_k}$, где $\varphi_k = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}, k = 0, 1, 2, 3.$

Изобразив решения в комплексной плоскости, мы получим квадрат, как на рисунке 5.

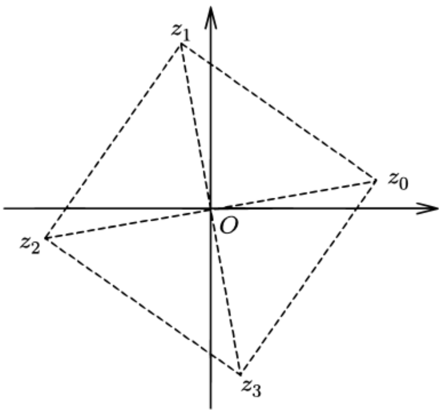

Рис. 5. Решения уравнения

Далее я стал выбирать и использовать для геометрической интерпретации комплексных чисел прикладную математическую программу.

Если работать с программой Geogebra в качестве геометрического приложения, то на основной вкладке «Точка» в раскрывающемся списке сразу можно найти вкладку «Комплексное число» (рисунок 6). В разных версиях этой программы выбор комплексного числа все равно будет выглядеть примерно одинаково.

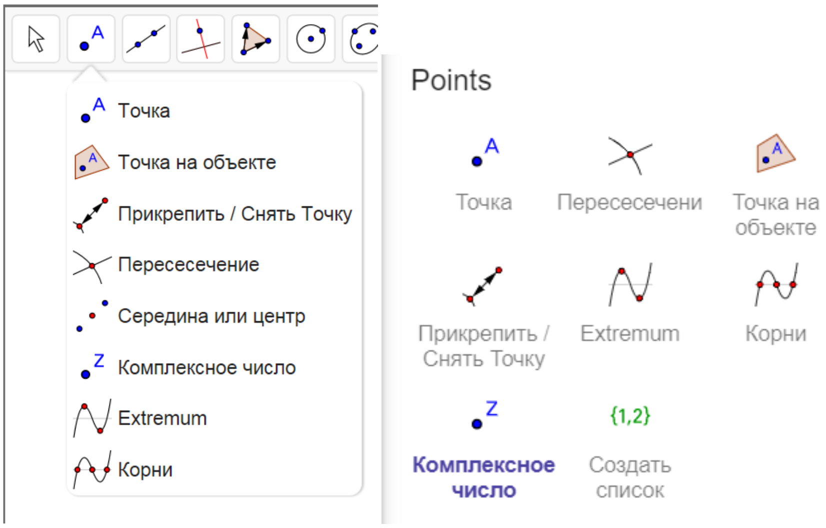

Рис. 6. Программа Geogebra

Это говорит о том, что создатели подобных программ уже сразу предполагали, что пользователи будут работать с комплексными числами. Выполним в этой программе некоторые построения. Мы ограничились построением векторов. Включив режим «Графический калькулятор» можно увидеть координаты комплексных чисел и координаты соответствующих векторов, пример работы такого графического калькулятора представлен на рисунке 7.

У программы GeoGebra имеется онлайн версия: Geogebra online (ГеоГебра онлайн). После перехода на сайт www.geogebra.org, вы можете открыть программу GeoGebra в своем браузере для выполнения необходимых действий. Таким образом, даже не устанавливая программу GeoGebra на свой компьютер, при наличии интернета, вы можете работать в этой математической программе, войдя на онлайн сервис со своего любого мобильного устройства.

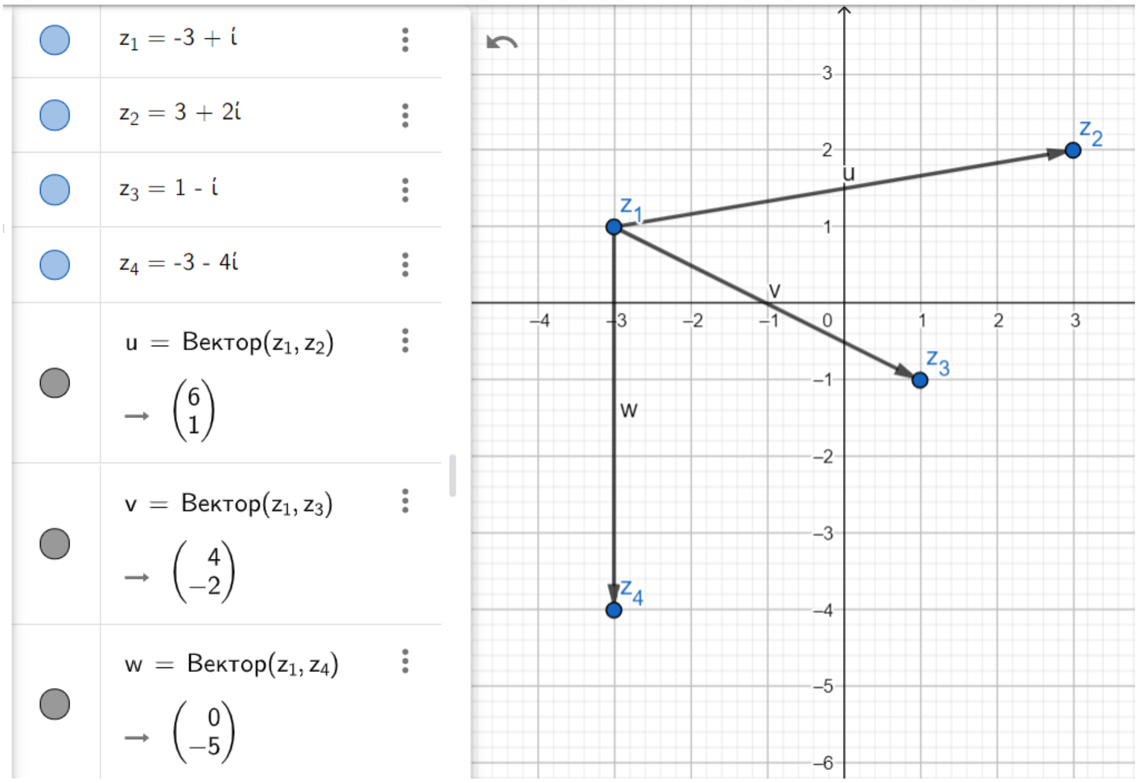

Рис. 7. Режим «Графический калькулятор»

Комплексные числа получают все большее распространение не только в математике, но и в других науках, поэтому появляется все больше прикладных программ для работы с ними.

Список литературы

1. Понарин Я.П. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах: книга для учащихся математических классов школ, учителей и студентов педагогических вузов / Я.П. Понарин. – М.: МЦНМО, 2004. – 160 с.

2. Яглом И.М. Комплексные числа и их применение в геометрии / И.М. Яглом. – М.: Либроком, 2020. – 192 с. (Серия «Науку – всем! Шедевры научно-популярной литературы (математика)).

3. Комплексные числа. 9–11 классы / Ю.А. Глазков, И.К. Варшавский, М.Я. Гаиашвили. – М.: Экзамен, 2012. – 157 с. (Серия «Предпрофильная и профильная подготовка»).