(cc) BY

Садовников Ноколай Владимирович
д-р пед. наук, профессор
Новичкова Татьяна Юрьевна
канд. пед. наук, доцент
Шипанова Елена Викторовна
канд. пед. наук, доцент
Пензенский филиал ФГКВОУ ВО «Военная академия материально-технического обеспечения им. генерала армии А.В. Хрулева» Минобороны России
г. Пенза, Пензенская область

ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ТЕОРЕМ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ И ВОЗМОЖНОСТИ ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ В ВУЗОВСКОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

***Аннотация**: раскрыты теоретико-методологические основы изучения теоремы как математической оболочки суждений: элементы суждения, его символическое представление в виде формулы, виды суждений. Выделение теоремы как частный случай суждений, логическая структура теоремы, основные виды теорем в математике, связь между основными видами теорем, необходимое и достаточное условие. Выявлены основные проблемы современной средней и высшей школы при изучении теорем в курсе математики.*

***Ключевые слова**: понятие, суждение, умозаключение, логическое подлежащее, логическое сказуемое, логическая связка, классификация суждений, виды суждений, аксиомы, теоремы, доказательство теоремы, силлогизм, логическая структура теоремы, основные виды теорем и связь между ними, прямое и косвенное доказательства, необходимое и достаточное условия, недостатки в работе над теоремами в современном курсе математики.*

Важнейшей формой мышления, наряду с понятием и умозаключением, является суждение.

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Число 124 – четное.

Сумма внутренних углов выпуклого *n*-угольника равна $180\cdot(n-2)$.

$(f+g)' = f' + g'$.

Вышеперечисленные предложения характерны содержащимися в них утверждениями, возможно, нуждающимися в обосновании. Это есть примеры *суждений*, с помощью которых устанавливается связь между понятиями. Суждения представляют собой форму мышления, которая что-либо утверждает либо отрицает относительно объектов или явлений, их свойств и отношений и которая обладает свойством выражать истину либо ложь. Суждение, верно отражающее ту или иную сторону объективной реальности, называют истинным, в противном случае – ложным.

В суждении можно выделить 3 элемента: логическое подлежащее (субъект мысли), то есть то, о чем мы что-то высказываем; логическое сказуемое (предмет мысли) – то, что высказывается о предмете; логическая связка.

Между различными суждениями также можно устанавливать связи с помощью умозаключений. Например, имеем два суждения: $a > b$ и $b > c$. В процессе умозаключения делаем новый вывод – получаем новое суждение: тогда $a > c$. Таким образом, умозаключение – это мыслительный процесс, связывающий несколько математических суждений и делающий в результате новое суждение, другими словами, это форма мышления, в которой из одного или нескольких суждений получают новое суждение.

Всякое суждение символически можно представить в виде формулы: Q есть R или Q не есть R, где Q и R – переменные. Например, в суждении «сумма смежных углов равна 180^0» в качестве Q выступают два смежных угла, а переменной R – равенство 180^0 их суммы. Данное суждение является истинным.

Суждения, выражающие отношения, имеют форму *a*R*b*, где *a* и *b* – переменные, R обозначает отношение. Например, прямая *a* перпендикулярна прямой *b* $(a \perp b)$; 126 делится на 3 $(126:3)$.

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Классификацию суждений можно проводить в зависимости от объема и содержания отображаемых в суждении объектов, а также от характера связи объектов и свойств.

По *объему_отображаемых_предметов* выделим *общие* и *частные* суждения: все Q есть R, некоторые Q есть R. Все ромбы есть параллелограммы, некоторые параллелограммы есть прямоугольники.

По *характеру_связи* отображаемых предметов и их свойств суждения делятся на условные, разделительные и категорические: если Q есть R, то Q_1 есть R_1; Q есть R_1 или R_2; Q есть R.

По *качеству_отображаемых_предметов* суждения делятся на *утвердительные* и *отрицательные*: все Q есть R; никакие Q не есть R [1]

Из общих и частных, утвердительных и отрицательных видов суждений можно составить общеутвердительные, общеотрицательные, частноутвердительные, частноотрицательные суждения. Средствами математической логики они запишутся следующим образом:

$\forall x\,(Q(x) \Rightarrow R(x))$ – для всех *x*, если *x* присуще свойство Q, то *x* присуще свойство R. Это общеутвердительное суждение.

$\exists x\,(Q(x) \wedge R(x))$ – существует такой объект x, которому присуще свойство Q и которому присуще также свойство R. Это есть частноутвердительное суждение.

Общеотрицательное суждение запишется так:

$\forall x\,\left(Q(x) \Rightarrow \overline{R}(x)\right)$ – всякому *x*, которому присуще свойство Q, не присуще свойство R.

Частноотрицательное суждение:

$\exists x\,\left(Q(x) \Rightarrow \overline{R}(x)\right)$ – существует такой *x*, которому присуще свойство Q и не присуще свойство R[2]

Эти четыре вида суждений имеют место в человеческой повседневной практике и в математике как науке. Но первые два из них представляют наибольшую ценность и для науки, и для школьного и вузовского курсов математики.

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Общеутвердительные или общеотрицательные суждения, принимаемые за истинные без доказательства, называют *аксиомами*, если же их истинность устанавливается посредством специального логического рассуждения, то *теоремами*.

Первичные (основные) понятия и аксиомы являются фундаментом для построения курса математики. Основную же теоретическую часть курса математики составляют теоремы. Их число велико, но поскольку ни школьный, ни вузовский курсы математики нельзя расширять неограниченно, то часть теорем рассматриваются как задачи на доказательство. При доказательстве теорем в курсе математики наиболее употребим силлогизм, имеющий схему:

Большая посылка – все M суть P.

Малая посылка – все S суть M.

Вывод: S суть P.

В формулировке любой теоремы можно выделить две части: $S(x)$ – условие и $P(x)$ – заключение. В зависимости от характера соединения этих частей выделяют два основных вида формулировок теорем – категорическую и условную.

Категорическая форма: в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Условная форма: если четырехугольник – параллелограмм, то противолежащие углы равны. Использование условной формы методически более предпочтительно, поскольку позволяет четче выделить структуру теоремы.

Независимо от вида формулировки в любой теореме можно выделить логическую структуру в виде импликации $S \Rightarrow P$, где S – условие, P - заключение. Тогда, поменяв местами условие и заключение, получим суждение $P \Rightarrow S$, которое называют *обратной_теоремой*. Заменив в исходной теореме условие и заключение их отрицаниями, получим теорему $\overline{S} \Rightarrow \overline{P}$, которую называют *противоположной*. А теорему $\overline{P} \Rightarrow \overline{S}$ называют *обратной_противоположной*.

Теоремы $S \Rightarrow P$ - прямая и $\overline{P} \Rightarrow \overline{S}$ – обратная противоположной одновременно истинны или ложны (по-другому, равносильны друг другу). Также и

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

теоремы $P \Rightarrow S$ и $\overline{S} \Rightarrow \overline{P}$ являются равносильными. Поэтому и в математике (науке), а также в школьном и вузовском курсах вместо четырех видов теорем изучают только прямые и обратные теоремы. Вышесказанное отражает одну из точек зрения на теорему, согласно которой теоремой будет являться не только истинное утверждение, но и ложное. Кроме прямой теоремы «сумма смежных углов равна 180^0», можно говорить и о теореме «если сумма углов равна 180^0, то эти углы смежные», которая неверна.

Мы придерживаемся другой точки зрения, согласно которой к теоремам нужно относить лишь общеутвердительные или общеотрицательные истинные суждения. В вузовских и школьных учебниках по математике также придерживаются этой трактовки, в них мы не увидим в качестве теорем ложных утверждений.

В доказательстве теоремы выделяют три основные части: тезис – то, что требуется доказать, доводы – то, что используется при доказательстве, доказательство – способ рассуждения. По способу ведения выделяют два вида доказательств – прямое и косвенное. Прямое характеризуется тем, что тезис в теореме обосновывается непосредственно путем логических рассуждений. Для того чтобы доказать истинность тезиса, надо опровергнуть истинность антитезиса. Примером косвенного доказательства является доказательство методом от противного и раздельное доказательство (методом исключения случаев) [2]

С условием и заключением теоремы связаны необходимое и достаточное условия. Необходимым условием некоторого суждения называется такое условие, без выполнения которого суждение не может быть истинным, а при его выполнении может быть истинным или ложным. В суждении «если натуральное число четное, то оно делится на 4» четность – есть необходимое условие делимости на 4 (но этого не достаточно). Рассмотрим обратное утверждение: если число делится на 4, то оно четное. *Достаточное условие* – это такое условие, при выполнении которого наше суждение обязательно истинно. Условие будет *необходимым_и_достаточным* для некоторого суждения, если без его выполнения

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

суждение не может быть истинным, а при его выполнении оно обязательно истинно.

В теореме $S(x) \Rightarrow P(x)$, $P(x)$ является необходимым условием для $S(x)$, а $S(x)$- достаточное условие для $P(x)$. Если истинны прямая и обратная теоремы, то говорят, что теорема выражает необходимое и достаточное условия.

Теорема Ферма выражает необходимое условие экстремума функции f и в этой точке существует производная $f'(x_0)$, то она равна нулю: $f'(x_0) = 0$. Как известно, равенство нулю производной функции в данной точке еще недостаточно, чтобы говорить об этой точке x_0 как точке экстремума. Для этого необходимо еще одно условие – изменение знака производной при переходе через эту точку.

Теорема, выражающая признак перпендикулярности прямой и плоскости, выражает достаточное условие. Всякая теорема, выражающая некоторый признак, формулирует достаточное условие.

Теорема о трех перпендикулярах является необходимым и достаточным условием. Такие теоремы можно формулировать не только с помощью связки «необходимо и достаточно», но и «тогда и только тогда».

Первичное знакомство школьников с терминами теорема и аксиома осуществляется в 7 классе, когда начинается изучение геометрии. Как показывает практика обучающиеся к этому времени не видят и не понимают необходимость доказательств. Из-за несформированности логических умозаключений и достаточно высокого уровня абстракции они теряются в доказательствах. Соответственно уже в курсе математики 5–6 классов необходимо включать в процесс обучения упражнения, позволяющие показывать школьникам необходимость логических доказательств некоторых утверждений, а также знакомить учащихся с первыми дедуктивными доказательствами.

К сожалению, из вузовского курса, как в прочем и школьного, исчезли доказательства теорем, выводы математических формул. Это настоящая беда современного математического образования. Какая может быть математическая

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

подготовка специалиста с высшем образованием без умения доказывать, обосновывать свои утверждения. Ограничивать познания обучаемых только формулировками определений математических понятий или теорем есть серьезная стратегическая ошибка в обучении не только математике, но и других общепрофессиональных предметов: физики, химии и др. Вузовские программы по математике перегружены перечнем вопросов, необходимых к усвоению, поэтому, чтобы все это успеть пройти за отведенное время, преподаватель вынужден пропускать этапы работы над теоремами, связанные с их доказательством. А уж о том, чтобы обучать студентов «открывать» какие-то математические факты в виде теорем, «подводить» их к идее доказательства или «находить» другие способы их доказательства – об этом в вузе уже и не задумываются ни преподаватели, ни тем более студенты или курсанты.

Список литературы

1. Саранцев Г.И. Обучение математическим доказательствам в школе. – М., 2000. – 173 с.

2. Садовников Н.В. Логико-математические методы в экономике: монография. – Пенза, 2003. – 147 с.

3. Садовников Н.В. Методическая подготовка учителя математики в педвузе в контексте фундаментализации образования: монография. – Пенза: ПГПУ, 2005. – 283 с.

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)