Садовников Николай Владимирович
д-р пед. наук, профессор
Шипанова Елена Викторовна
канд. пед. наук, доцент
Новичкова Татьяна Юрьевна
канд. пед. наук, доцент
Пензенский филиал ФГКВОУ ВО «Военная академия материально-технического обеспечения им. генерала армии А.В. Хрулева» Минобороны России
г. Пенза, Пензенская область

ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ПРАВИЛ И АЛГОРИТМОВ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Аннотация*: рассматриваются теоретические основы изучения правил и алгоритмов в курсе математики: что понимается под алгоритмом на содержательно – интуитивном уровне. Выделены существенные свойства алгоритма: массовости, дискретности и элементарности шагов, детерминированности и результативности. Выявлено отличие алгоритма от правила. Выделены основные формы правил, встречающихся в курсе математики: словесное правило, правило – формула, правило – тождество, правило – определение, правило – теорема. Подчеркивается важность осуществления логико – математического анализа при изучении правил и алгоритмов в курсе математики. Разработана методическая схема формирования правил и алгоритмов, сформулированы цели каждого из этапов работы над правилами и алгоритмами. Обоснована важность использования правил и алгоритмов при решении стандартных задач, выявлены основные методические особенности их решения. Если главным существенным признаком стандартной задачи является наличие в курсе математики таких общих правил, положений, которые однозначно определяют программу ее решения, то для решения нестандартной задачи важно знание кроме* *правил и алгоритмов, еще особых логических приемов и операций, так называемых эвристик.*

Ключевые слова*: математическое правило, алгоритм, существенные свойства алгоритма, результативность, дискретность, элементарность шагов, детерминированность, массовость, словесное правило, основные формы правил, правило – формула, правило – тождество, правило – определение, правило – теорема, логико-математический анализ алгоритмов, эвристический прием, эвристика.*

Наряду с понятиями, теоремами и аксиомами важнейшей составляющей теоретической части содержания математического образования являются правила и алгоритмы. Под алгоритмом на содержательно – интуитивном уровне понимается точное и понятное предписание, указывающее какие операции и в какой жизнедеятельности надо осуществить с данными, чтобы решить любую задачу данного типа. Алгоритм описывает некоторый общий метод решения целого класса однотипных задач, т.е. является как бы формой выражения этого общего метода. Конечно, это не строгое математическое определение понятия алгоритма, это понятие можно отнести к неопределяемым. Суть этого понятия можно раскрыть перечислением некоторых его существенных свойств. Выделим следующие свойства алгоритма: 1) свойство массовости; 2) дискретности и элементарности шагов; 3) детерминированности; 4) результативности. Первое свойство дает возможность с помощью данного алгоритма решить все задачи определенного типа. Свойство дискретности означает выделение отдельных шагов (этапов) при словесной форме задания алгоритма или отдельных блоков при схематическом задании. Элементарность означает возможность их выполнения исполнителем, т.е. каждый шаг алгоритма считается для него элементарным, легко реализуемым. Свойство *детерминированности* предполагает жесткую, строгую направленность решения задачи по заданному алгоритму. Данное свойство однозначно указывает на последовательность шагов: нельзя выполнить второй раньше первого, третий раньше второго. Пунктуальное, точное выполнение шагов алгоритма при решении любой задачи, из массиватаких задач, решаемых по данному алгоритму, через конечное число шагов обязательно должно приводить к определенному результату, даже если этим результатом будет установление факта, что данная задача решения не имеет. Это свойство результативности алгоритма.

Кроме алгоритмов, предписывающих общий порядок решения целого блока задач также применяются правила, которые являются как бы «свергнутыми алгоритмами». В них отдельные элементарные шаги свернуты в блоки, таким образом, что система операций представлена в сжатом виде, а некоторые операции, как правило, используемые на начальном этапе формирования приема решения задач, вообще не содержатся в формулировке правила.

Таким образом, любой алгоритм можно считать правилом, но не всякое правило является алгоритмом, так как оно обычно не обладает хотя бы одним из перечисленных четырех характеристических свойств алгоритма. Обычно в правиле не выделяются шаги (в этом смысле оно не обладает свойством дискретности) или не задается строгая последовательность шагов в решении задачи (т.е. отсутствует свойство детерминированности).

Использование правил имеет ту же цель, что и использование алгоритмов, а именно: формирование общих методов решения классов однотипных задач.

Правила в математике могут быть изложены в различных формах. Выделим следующие основные формы правил, используемых для решения любой задачи некоторого вида.

1. Словесное правило является основной формой правила, сформулированное на естественном языке. Примером таких правил являются правила умножения десятичных дробей, правило возведения степени в степень, умножение многочлена на многочлен, в вузе словесно можно сформулировать, например, правило Лопиталя для раскрытия неопределенности при нахождении пределов.

Согласно правилу умножения десятичных дробей можно составить следующую последовательность шагов для выполнения этой операции:

1) отбросить занятые в сомножителях;

2) полученные на первом этапе числа перемножить (как натуральные);

3) сосчитать сколько цифр справа отделено запятой в первом числе, сколько – во втором и сколько будет вместе;

4) в результате, полученным при выполнении шага 2, выделить справа столько цифр, сколько получилось в результате выполнения шага 3;

5) если цифр в полученном произведении меньше, чем то их количество, которое надо выделить, то недостающее количество цифр заполняют нулями.

2. Правило – формула позволяет любую математическую формулу представить в виде последовательности шагов по решению задачи. Формулу $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ можно посчитать за алгоритм нахождения производной функции $y=f(x)$ в точке x_0. Чтобы найти производную функции в точке x_0, надо:

1) зафиксировать аргумент x_0 и дать x_0 приращение Δx $(x_0+\Delta x)$;

2) найти приращение функции, которое она получает, при заданном приращении аргумента $\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$;

3) вычислить отношение $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$;

4) найти значение этого отношения в пределе, когда приращение аргумента $\Delta x\to 0$.

3. Правило – определение. В такой форме правило может быть дано уже в самом определении некоторого понятия. Например, решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы. Проанализировав данное определение, можно составить следующую программу (правило, алгоритм) решения системы неравенств с одной переменной:

1) решить каждое неравенство системы (т.е. получить числовой промежуток – его решение);

2) найти общую часть (пересечение) полученных числовых промежутков.

5. Правило – теорема. На основе теоремы также можно составить правило для решения целого класса задач, указанных в самой же теореме. Знаменитая

теорема Пифагора может служить правилом для решения целого класса задач на нахождение катета прямоугольного треугольника по известной гипотенузе и второму катету, а также на нахождение гипотенузы по двум катетам.

Итак, заметим, если правило для решения задач сформулировано в виде словесного утверждения или формулы, то сначала с ним надо хорошенько поработать и развернуть его в последовательность действий, шагов, т.е. в алгоритм решения математической задачи. Это еще в большей степени относится к некоторым определениям и теоремам, на основе которых можно составить правила решения задач соответствующих видов.

Для организации работы со студентами по овладению правилами или алгоритмами преподавателю необходимо уметь выполнять их логико-математический анализ [1], который заключается:

1) в проверке наличия у данного правила характеристических свойств алгоритма;

2) в выделении последовательности операций и логических условий в данном правиле;

3) в установлении связи алгоритма (правила) с другими знаниями;

4) в установлении математической основы данного правила, т.е. тех основополагающих математических положений, которые позволяют построить именно такое правило. Посредством такого анализа преподаватель правильно подберет материал для грамотной работы по овладению правилом.

Проверяя правило умножения десятичных дробей на наличие характеристических свойств алгоритма, можно увидеть, что оно явно обладает свойствами массовости и результативности. Можно увидеть последовательность элементарных шагов при умножении десятичных дробей, но в явном виде они не выделены, поэтому данное правило не обладает свойством детерминированности. Таким образом, это правило не является алгоритмом. Можно попросить обучаемых сформулировать это правило в виде алгоритма, т.е. строго упорядочить последовательность шагов.

Для чего нужны правила и алгоритмы? С точки зрения функциональности правила нужны для формирования общих, единыхприемов решения класса однотипных задач. И это главное и единственное назначение, тогда как методическое назначение различно. На начальных этапах формирования действий целесообразно использовать алгоритмы, так как в них четко прописаны шаги и порядок их выполнения. Правила же удобно применять тогда, когда элементарные операции и действия обучаемый уже умеет выполнять и готов к выполнению обобщенных действий и даже приемов.

При формировании навыков применения правил и алгоритмов можно предложить следующую методическую схему [2]:

1) мотивация изучения правила (алгоритма);

2) введение правила;

3) усвоение правила;

4) применение правила.

Цель первого этапа – показ необходимости (актуальности) правила или алгоритма для решения практических задач, актуализация знаний, необходимых для введения и обоснования алгоритма. Цель второго этапа – подвести обучаемых к «открытию» нужного правила, сформулировать его. Это достигается с помощью различных методических средств, приемов. Главная цель этапа усвоения правила состоит в целенаправленной отработке операций, входящих в алгоритмы и усвоение их последовательности. Цель завершающего этапа – отработка правила в знакомых ситуациях (при варьировании исходных данных) и незнакомых ситуациях.

Математические задачи, для решения которых в курсе математики имеются готовые правила, или эти правила непосредственно следуют из каких-либо определений или теорем, определяющих программу решения этих задач, обычно называют стандартными. Отметим основные особенности решения стандартных задач.

1. Первый этап в работе над такой задачей состоит в установлении (распознавании) вида задач, которому принадлежат задания.

2. Этап поиска плана решения сводится к составлению последовательности шагов на основе общего правила (формулы, тождества, определения понятия, теоремы) решения задач данного типа. Эту последовательность (алгоритм) достаточно наметить в уме.

3. Собственно решение задачи состоит в применении этой составленной общей последовательности к условиям данной задачи. При этом если некоторые шаги плана решения требуют для своего выполнения использования каких-то программ (подпрограмм), то в отношении их производятся те же операции, что указаны в пунктах 1, 2, 3.

Главный вывод, следующий из вышеперечисленных особенностей процесса решения стандартных задач, состоит в том, что, для того чтобы легко решать стандартные задачи, которые являются основными математическими задачами, так как все другие в конечном итоге сводятся к ним, нужно:

1. Знать, держать в памяти все изученные в курсе математики общие правила (формулы, тождества) и общие положения (определения и теоремы), которые используются при решении задач соответствующих видов.

2. Уметь разворачиватьлаконичные общие правила (в каком бы виде они не были даны) в последовательности шагов для решения задач соответствующего вида. Этому умению нужно учиться на протяжении всех лет обучения математике. Ни в школьном, ни в вузовском курсах не даются готовые программы решения таких задач, их нужно уметь самим извлечь из изучаемых правил, формул, тождеств, определений, теорем. Не научившись этому умению и не обладая им, обучающиеся не смогут решать многие простейшие стандартные задачи, а тем более нестандартные задачи, для решения которых необходимо применить сразу несколько стандартных задач в виде совокупности алгоритмов, программ. При некоторой настойчивости этим достаточно несложным умением можно быстро овладеть, необходим лишь постоянный тренинг по развертыванию общих правил в полноценные алгоритмы. Такие тренировки помогут производить эту работу быстро, почти не задумываясь. Если твердо помнить все общие положения и правила школьного и вузовского курсов математики и уметь быстро развертывать

их в последовательность действий для решения соответствующих задач, то решение любых стандартных задач не будет представлять для обучающихся никаких серьезных затруднений.

Основным, существенным признаком стандартных задач мы считаем наличие в курсе математики общих правил или предписаний, которые однозначно определяют методику решения этих задач. Тогда нестандартные задачи – это задачи, для которых в курсе математики не имеется общих положений, определяющих точную методику их решения.

Наш опыт и практика показывают, что процесс решения нестандартной задачи состоит в последовательном применении следующих мыслительных операций:

1) сведение (путем переформулирования или преобразования) нестандартной задачи к эквивалентной ей, но уже стандартной;

2) разбиение нестандартной задачи на ряд стандартных подзадач.

В зависимости от сложности нестандартной задачи может использоваться одна из этих операций, а могут и обе, иногда даже многократно. В математике в явном виде нет каких-либо общих правил по применению указанных двух операций для решения нестандартных задач.Она не занимается разработкой таких правил, но в школьном курсе можно наблюдать использование этих операций на многочисленных примерах. Педагоги – математики стараются находить ряд общих указаний – рекомендаций, которыми следует руководствоваться при решении нестандартных задач. Обычно эти указания называют эвристическими приемами или просто эвристиками [3]. Они носят характер необязательных рекомендаций, советов, следование которым может привести, а может и не привести к решению задачи. И школьный, и вузовский курсы не должны ограничиваться решением только стандартных задач, в них должны содержаться для усиления развивающего потенциала математики достаточное количество нестандартных задач. Умение решать именно такие задачи и является наиболее солидным критерием успешного усвоения курса математики как учащимися, так и студентами, и курсантами.

Список литературы

1. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики/ Под редакцией Е.И. Лященко. М., 1988. – 223 с.

2. Садовников Н.В. Методическая подготовка учителя математики в педвузе в контексте фундаментализации образования: монография. – Пенза: Пензенский госпедуниверситет, 2005. – 283 с.

3. Садовников Н.В. Проблема подготовки учителя математики в педвузе к обучению учащихся решению задач// Актуальные проблемы подготовки будущего учителя математики. Историко – математический и историко – методический аспекты: Межвузовский сборник научных трудов. Вып. 4, Калуга: КГПУ, 2002. С.197 – 200.