УДК 69
DOI 10.21661/r-555240

Павлов А.В.

ПОЛЕ СДВИГОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

***Аннотация**: доказано совпадение поля сдвигов с исходной аналитической функцией, если данная функция четна, и совпадение с исходной отраженной функцией в общем случае. Аналогичный результат верен для действительной и мнимой части таких функций. Как следствие получена периодичность аналитических функций в достаточно общих условиях. Поле сдвигов совпадает с результатом отражения значений исходной функции относительно произвольной точки на действительной прямой. Исследован случай действительной на мнимой оси аналитической функции.*

***Ключевые слова**: периодичность аналитических функций, сдвиги функций, совпадение с константой, отражение функций.*

Введение.

В данной статье рассматриваются как действительные функции двух переменных (теорема 2), так и комплексные аналитические функции (теорема 1), которые после сдвигов на произвольную постоянную величину образуют, вообще говоря, неаналитическую функцию точек плоскости (некоторое поле). В качестве иллюстрации результата теоремы 1 приведем пример, из которого следует возможность периодичности функции как результат совпадения ее значений с некоторым полем значений.

Если значения произвольной действительной функции сдвинуть на величину 2A вправо, то мы получаем поле сдвигов F(x, y), значения которого в каждой точке (A, y) совпадает с одновременно со значениями u(x-2A, y) и u(-x, y), то есть u(x-2A,y) = u(-x, y), x=A>0. Если u(-x, y)=u(x, y), то поле сдвигов функции u(x, y) в правой полуплоскости совпадает с исходной функцией u(x, y): u(x, y)= u(x-2A, y) при всех (x, y) из правой полуплоскости (при всех x=A). Отметим, что обе функции u(-x, y), u(x, y), гармоничны, если гармонична хотя бы одна из них, то есть поле сдвигов F(x, y) действительной части аналитической в левой полуплоскости функции совпадает с действительной частью некоторой аналитической в правой полуплоскости функции f(p)=u(x, y)+iv(x, y) в случае действительности функции f(p) на мнимой прямой (по теореме Римана u(-x, y)=u(x, y) в данной ситуации [6]).

В теореме 1 данный факт обобщен на случай произвольных аналитических функций. Следствием теоремы 1 является периодичность такого рода функций с периодом 2B<2A.

В теореме 2 рассмотрены функции с четной по x действительной частью (этим свойством обладают по теореме Римана все аналитические в окрестности мнимой оси функции, действительные на всей мнимой оси [6]). Следствием теоремы 2 является действительность значений такого рода функций в некоторой области правой полуплоскости.

Второй очевидный факт получается, если значения произвольной комплексной аналитической функции f(p) сначала сдвинуть на величину 2A вправо, а затем отразить относительно точки (0, A); в результате таких действий имеем функцию f(-p) (достаточно проследить перемещение оси Re p = -A). Данный факт используется в теореме 1.

Теореме 1 продолжает результаты статей [1; 2] относительно возникновения периодичности функций на плоскости. Если рассмотреть значения аналитических функций f(p-2A) в точках с действительной частью, равной A при всех действительных A, то мы получим некоторое поле сдвигов F(p): F(p)=f(p-2A) при всех p=A+iy. Доказано, что данное поле тоже можно считать аналитической функцией, которая периодична с некотором периодом 2A. Ввиду определения поля сдвигов теоремы 1 константа 2A может быть выбрана произвольной, и получившееся поле сдвигов совпадает с константой. С точки зрения аналитических продолжений данное поле сдвигов в некоторых условиях совпадает с исходной функцией. Из данного результата формально следуют основные результаты статей [1–4], относящихся к преобразованию Лапласа.

Доказана теорема 1, которая продолжает результаты статей [1; 2] относительно возникновения периодичности функций на плоскости. В данной статье рассматриваются комплексные аналитические функции, которые после сдвигов на произвольную постоянную величину образуют, вообще говоря, неаналитическую функцию (некоторое поле). Доказано, что данное поле тоже можно считать аналитической функцией, которая периодична с некотором периодом 2A. Ввиду определения поля сдвигов теоремы 1 константа 2A может быть выбрана произвольной, и получившееся поле сдвигов совпадает с константой. С точки зрения аналитических продолжений данное поле сдвигов в некоторых условиях совпадает с исходной функцией. Из данного результата формально следуют основные результаты статей [1; 3], относящихся к преобразованию Лапласа.

1. Операторы сдвига

В В теореме 1 рассмотрено поле значений F(p) из введения при всех $x > 0, y \in (-\infty, \infty)$. Так как уравнение z = g(p) = f(2A – p) определяет симметричное отражение значений функции $z = f(p)$ относительно точки B = (0,A) (ввиду g(p) = f(A – (p – A), если f(A + (p – A)) = f(p)), то данное поле можно так же получить отражением функции f(-p) относительно точки (A,0) при всех A>0 (очевидно, f(p-2A)=f(-(2A-p))), такое отражение мы назовем G симметрией функции f(-p). Результат теоремы 1 обобщает результаты статей [1,2], в которых доказана периодичность исходной аналитической функции как следствие аналитичности поля F(p) при некоторых достаточно общих условиях.

Теорема 1.

Если функция $z = f(p)$ аналитична при всех $-4A < Re\, p < 4A,\ A \in (0, \infty),$ то функция f(p) совпадает при всех A> 0 с полем сдвигов F(p) функции f(p).

Доказательство.

Значения поля сдвигов F(p) по определению совпадает с выражением

$$F(p) = u(-x, y) + iv(-x, y) =$$
$$= U(x, y) + iV(x, y), \forall p = x + iy,$$

при всех Re p=A>0.

Отметим, что на прямой Re p=A значения в верхней и нижней полуплоскости как результат сдвига функции f(p) на величину 2A и как результат отражения относительно центра координат совпадают со значениями одной и той же аналитической функции, у которой значения в верхней полуплоскости (значения f(p-2A)) отражены относительно точки (A,0) (достаточно проследить образ прямой Re p=-A при сдвиге на 2A и при отражении относительно центра координат). Данный факт означает, что в общей ситуации теоремы 1 f(p-2A)=f(-p) при всех x=A>0. С точки зрения действительной и мнимой частей f(p) эквивалентно тождествам

$$f(p-2A)=u(x-2A,y)+iv(x-2A,y)=$$
$$=u(-x,-y)+iv(-x,-y),\ x=A\in[0,\infty),\ y\in(-\infty,\infty).$$

(данный факт обобщает результат совпадения G симметрии функции f(-p) с полем сдвигов. F(p)).

Следовательно, при любом x =A>0

$$F(p)=u(-x,y)+iv(-x,y)=u(x-2A,y)+iv(x-2A,y)=$$
$$u(-x,-y)+iv(-x,-y)=f(-p),$$
$$p=x+iy,\operatorname{Re}p=A.$$

Теорема 1 доказана.

Поле сдвигов действительной части совпадает с действительной частью функции f(p), как это было отмечено во введении в случае действительности f(p) на мнимой прямой. Рассмотрим аналогичный факт для мнимой части f(p).

Обозначим через G(x, y) поле сдвигов мнимой части V(x, y), аналитической функции f(p) (по определению G(x, y)=V(x-2A,y), если (x, y)=(A, y) при всех действительных A>0).

В теореме 2 доказана действительность аналитической функции f(p) в достаточно общих условиях в случае действительности функции на комплексной оси.

Теорема 2.

Если функция $z=f(p)$ аналитична при всех $-4A<Re\,p<4A,\ A\in(0,\infty)$, и

$Re\,p=p,\ p\in(-i\infty,i\infty)$,

то функция f(p) =Re p при всех p=x+iy : y>0, 0<x<4A.

Доказательство.

Поле сдвигов F(p) в правой полуплоскости совпадает с сопряженной к f(p) функцией $\overline{f(p)}$. Следовательно, в правой полуплоскости одновременно выполнены два равенства

$$f(p) = F(p) = u(x-2A, y) + iv(x-2A, y) =$$
$$= u(x-2A, y) - iv(x-2A, y)$$
$$p = x + iy, \operatorname{Re} p = A.$$

Теорема 2 доказана.

2. Заключение

Из теоремы 1 следует, например, аналитичность двойного преобразования Лапласа из статей [1–4] в некоторой открытой окрестности нуля. Данный факт является основой доказательства всех результатов данных статей.

Применение теорем 1,2 к математической физике требует дальнейшего отдельного рассмотрения. В статьях [5,7] отмечены аналогичные интересные факты в геометрии.

теореме 1 рассмотрены функции вида $f(p-2A)$ при положительных произвольных константах A>0. Значения данных функций на прямой с действительной частью, равной A образуют некоторое поле, которое, как доказано в теореме 1, является аналитической функцией в правой полуплоскости.

Список литературы

1. Pavlov A.V. The regularity of the Laplace transform. Math. Phys.and Comp. Model. Volgograd State University, 2019, 22, 1, 5–11.

2. Pavlov, A. V. About the equality of the transform of Laplace to the transform of Fourier. Issues of Analysis, 2016, 23, 1, 21–30.

3. Pavlov A.V. Permutability of Cosine and Sine Fourier Transforms. Journal Moscow University,Mathematics Bulletin, Springer, 2019, 74, 2, 75–78.

4. Павлов А.В. Регулярность преобразования Лапласа и преобразование Фурье. – Тула: Чебышевский сборник, 2020. – №4. – С. 162–170.

5. Павлов А.В. Геометрия на плоскости и линейный прогноз. Новое слово в науке: стратегии развития: материалы XIV Междунар. науч.-практ. конф. (Чебоксары, 30 дек. 2020 г.). – Чебоксары: ЦНС «Интерактив плюс», 2020.

6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.

7. Andrey V. Pavlov. Optimal linear prognosis II. Geometry in space. Intern. Jour. of Open Information Technologies, 9, 2, 9–13, 2021.

8. Pavlov A.V. The regularity of the Laplace transform Math. Phys.and Comp. Model. Volgograd State University, 2019, 22, 1, 5–11.

Павлов Андрей Валерианович – канд. физ.-мат. наук, доцент, ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет радиотехники, электроники и автоматики», Москва, Россия.
