Батунина Юлия Алексеевна
учитель
МОУ «СОШ №40»
г. Саранск, Республика Мордовия

ОБОБЩЕННЫЕ ПРИЕМЫ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ

Аннотация*: по результатам проведения Единого государственного экзамена заметно существенное снижение процента выполнения задания №15. С чем это может быть связано? Учащиеся могут знать лишь о приемах решения определенного типа неравенств. В статье рассмотрено обобщение этих приемов.*

Ключевые слова*: ЕГЭ по математике, обобщенные приемы решения, решение неравенства.*

Какие неравенства встречаются в курсе алгебры? Еще в основной школе учащиеся знакомятся с линейными, квадратными, рациональными, иррациональными неравенствами. В старшей школе учащиеся знакомятся с показательными, логарифмическими, тригонометрическими неравенствами, с неравенствами, содержащими модуль.

Одной из проблем всех учащихся является сдача Единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике, так как данный предмет является обязательным.

В ЕГЭ неравенства встречаются в 15 задании. Данное задание является заданием повышенного уровня сложности и процент выполнения этого задания в 2019 году составил 20,8, в 2020–2021 году – 14,8. Заметно существенное снижение процента выполнения данного задания.

С чем это может быть связано? Учащиеся могут знать лишь о приемах решения определенного типа неравенств.

Данная тема является актуальной, поскольку обобщение приемов решения различных видов неравенств может привести к большему проценту выполнения задания №15 в ЕГЭ по математике.

Рассмотрим решение показательных и логарифмических неравенств.

При решении показательных неравенств в случае, если они относятся к неравенствам, сводящимся к простейшим, можно использовать все возможные методы и приемы для решения соответствующих типов показательных уравнений.

При решении простейших показательных неравенств для перехода от основания к степени необходимо учитывать монотонность функции. Если показательная функция монотонно возрастает, то при таком переходе знак неравенства сохраняется. Если функция монотонно убывает, то знак неравенства меняется.

При решении показательно-степенных неравенств целесообразно использовать метод рационализации.

1. $f(x)^{g(x)} \geq f(x)^{h(x)} <=> \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 1 \\ g(x) \geq h(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \leq f(x) \leq 1 \\ g(x) \leq h(x) \end{cases} \end{array}\right.$

2. $f(x)^{g(x)} \leq f(x)^{h(x)} <=> \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 1 \\ g(x) \leq h(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \leq f(x) \leq 1 \\ g(x) \geq h(x) \end{cases} \end{array}\right.$

3. $f(x)^{g(x)} > k(x)^{h(x)} <=> \big(f(x)\text{-}k(x)\big)g(x) < 0$ при одновременном условии, что $f(x) > 0, k(x) > 0$.

Пример 1. Решить неравенство: $(x+2)^x \leq (x+2)^{(x^2\text{-}6)}$.

Используя равносильную совокупность (пункт 2), получим:

$$(x+2)^x \leq (x+2)^{(x^2\text{-}6)} \leq> \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+2 \geq 1 \\ x \leq x^2\text{-}6 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \leq x+2 \leq 1 \\ x \geq x^2\text{-}6 \end{cases} \end{array}\right. <=>$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq \text{-}1 \\ x^2\text{-}x\text{-}6 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \text{-}2 \leq x \leq \text{-}1 \\ x^2\text{-}x\text{-}6 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. <=> \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq \text{-}1 \\ x \in (\text{-}\infty;\ \text{-}2] \cup [3;\ +\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} \text{-}2 \leq x \leq \text{-}1 \\ x \in [\text{-}2; 3] \end{cases} \end{array}\right. <=>$$

$$<=> \left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ \text{-}2 \leq x \leq \text{-}1 \end{array}\right. <=> x \in [\text{-}2;\ \text{-}1] \cup [3;\ +\infty).$$

Ответ: $x \in [\text{-}2;\ \text{-}1] \cup [3;\ +\infty)$.

При решении простейших логарифмических неравенств необходимо учитывать монотонность логарифмической функции. Знак неравенств будет

сохраняться в том случае, если функция будет возрастать, и изменяться, если функция будет убывать.

При решении логарифмических неравенств также можно использовать метод рационализации.

1. $log_a f(x) \geq b <=> \begin{cases} f(x) \geq a^b, \text{если a} > 1 \\ 0 < f(x) \leq a^b, \text{если } 0 < \text{a} < 1 \end{cases}$

2. $log_a f(x) \leq b <=> \begin{cases} 0 < f(x) \leq a^b, \text{если a} > 1 \\ f(x) \geq a^b, \text{если } 0 < \text{a} < 1 \end{cases}$

3. $log_a f(x) > log_a g(x) <=> \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$

$$log_a f(x) > log_a g(x) <=> \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

4. $log_{f(x)} g(x) \geq log_{f(x)} h(x) <=> \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq h(x) \\ h(x) > 0 \\ f(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) \geq g(x) \\ g(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases} \end{array} \right.$

5. $log_{f(x)} g(x) \leq log_{f(x)} h(x) <=> \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \leq h(x) \\ g(x) > 0 \\ f(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) \leq g(x) \\ h(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases} \end{array} \right.$

Пример 2. $log_{(x+2)}(2x) \geq log_{(x+2)} x^2$.

Используя равносильную совокупность (пункт 4), получим:

$$log_{(x+2)}(2x) \geq log_{(x+2)} x^2 <=> \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x \geq x^2 \\ x^2 > 0 \\ x + 2 > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 \geq 2x \\ 2x > 0 \\ 0 < x + 2 < 1 \end{cases} \end{array} \right. <=>$$

$$<=> \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2\text{-}2x \le 0 \\ x^2 > 0 \\ x > \text{-}1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2\text{-}2x \ge 0 \\ x > 0 \\ \text{-}2 < x < \text{-}1 \end{cases} \end{array}\right. <=> \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in [0;2] \\ x \in \mathbb{R} \\ x > \text{-}1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (\text{-}\infty;\ 0] \cup [2;\ +\infty) \\ x > 0 \\ \text{-}2 < x < \text{-}1 \end{cases} \end{array}\right. <=>$$

$$<=> \left[\begin{array}{l} x \in [0;2] \\ \begin{cases} x \in (\text{-}\infty;\ 0] \cup [2;\ +\infty) \\ x > 0 \\ \text{-}2 < x < \text{-}1 \end{cases} \end{array}\right. <=> \left[\begin{array}{l} x \in [0;2] \\ x \in \emptyset \end{array}\right. <=> x \in [0;2]$$

Ответ: $x \in [0;2]$.

Список литературы

1. Капкаева Л.С. Лекции по теории и методике обучения математике: частная методика: учебное пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов. В 2 ч. Ч. 1. – Саранск: Мордовский государственный педагогический институт, 2009. – 262 с. – ISBN 978-5-8156-0260-1

2. Саранцев Г.И. Методика обучения математике: методология и теория: учебное пособие для студентов бакалавриата высших учебных заведений по направлению «Педагогическое образование». – Казань: Центр инновационных технологий, 2012. – 291 с. – ISBN 978-5-93962-554-8