Павлов Андрей Валерианович

канд. физ.-мат. наук, доцент

ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический

университет радиотехники, электроники и автоматики»

г. Москва

DOI 10.21661/r-557677

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

***Аннотация**: в статье рассматриваются два факта теории аналитических функций. В первом факте отмечено нарушение единственности разложения на элементарные дроби в традиционной форме. Содержанием второго факта является периодичность аналитической функции как результата отражения относительно произвольной точки действительной оси. В этой ситуации появляется второе отражение относительно некоторой другой точки действительной оси, которое приводит к периодичности отраженной функции.*

***Ключевые слова**: разложение на элементарные дроби, нарушение теорем единственности, периодичность аналитических функций, сдвиги функций.*

Введение.

Статья посвящена нарушению теорем единственности разложения на элементарные дроби в традиционной форме и аналогичным фактам из теории аналитических функций. Приведены условия, в которых аналитическая функция после отражения относительно произвольной точки на оси OX становится периодической с произвольным периодом A>0. Данная ситуация, как доказано в первой части, возможна в двух случаях.

Во второй части рассмотрены некоторые нетрадиционные применения преобразований Фурье к некоторым прикладным задачам теории вероятности.

1. Два факта из теории функций

Рассматриваются два интересных по мнению автора факта из теории функции. Содержанием первого факта являются тождества

$$p[1/(p-1) - 1/(p+1)] = 1/(p-1) + 1/(p+1),$$

$$p/(p – 1)2 – p/(p2 – 1) = 1/(p – 1)2 + 1/(p2 – 1),$$

из которых следует неединственность разложения на элементарные дроби в традиционной форме (Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика В.А.Садовничего, 13–15 мая 2019; Математическая физика и компьютерное моделирование. ISSN 2587-6325, 2019. Т. 22, №1; 2020. Т. 23. №4). Второй факт вытекает из следующего рассуждения: рассмотрим комплексную функцию f(2A-p) (A-отражения), полученную отражением значений исходной функции z = f(p) (далее исходное отображение) относительно точки (0, A). Уравнение данного сопоставления точек плоскости в новой системе координат с центром в точке (0,-A) совпадает с уравнением z = f1(4A – w),w = p + A, где уравнение z = f1(w) совпадает с уравнением исходного отображения во второй системе координат (с переменной w); после перехода в уравнениях z = f(2A-p), z = f1(4A-w) к, соответственно, переменным w и p получаем, два уравнения одного отображения точек плоскости z = f(3A-w), z = f1(3A-p); для параллельных равных векторов 3A-w = W(w) = W и 3A-p = W(p) = W мы имеем два отображения, в которых одинаковые вектора W(w) и W(p) обменялись местами относительно их положения как радиус-векторов одного и того же исходного аналитического отображения (z = f(p) и z = f1(w) в двух системах координат), то есть в таких W точках значения z = f(3A – w), z = f1(3A – p) функций совпадают со значениями двух аналитических функций сдвинутых одна относительно другой на величину 2A (в исходной системе координат рассматривается передвинутое на A вправо исходное отображение). Мы получили, что в левой системе координат определено отображение, сдвинутое на 2A влево.

С другой стороны из равенства f(P – A) = f1(P) получаем, что равенства z = f1(W(w) + A), z = f1(W(p)) определяют ту же пару уравнений того же A-отражения, то есть значения в одинаковом радиус-векторе W, размещенным в центре левой и правой системы координат, совпадают со значениями исходной аналитической функции (для правой системы координат) и значением сдвинутой влево данной функции на величину A, а не 2A. Данный факт означает периодичность с периодом A функции f1(W), [7,8]. Мы доказали, что произвольное аналитическое f(W) отображение периодично с периодом A при любой аналитической в некоторой открытой области исходной функции f(p), A – произвольное действительное число (Internation journal of open inform. tech.,v.10, №2,2022, ISSN 2307-8162; Сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции. Чебоксары: Интерактив плюс, 2022).

К тому же результату приводит факт: результаты A и 2A отражений совпадают в случае четной f(p) функции (функция становится периодической с периодом 2A).

Некоторые применения к преобразованиям Фурье

Рассмотрим одну из классических задач теории фильтрации для случая, когда измеряемый сигнал не стационарен.

Мы предполагаем, что даны результаты измерений случайных траекторий $\xi(t)$ при $t \in [0,T]$ в точках

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T,$$

(по поводу выбора таких точек см. следствие 1 к теореме 1).

Через $\theta(t)$ обозначен полезный «сигнал», который надо оценить, а через $\eta(t)$ – шум, причем:

$$\xi(t)=\theta(t)+\eta(t),\ t \in [0,T]$$

Про «помеху» $\eta(t)$ известно, что она близка к «белому шуму» не обязательно с постоянной мощностью или является электромагнитным импульсом очень высокой частоты; в обеих случаях предполагается, что $M\eta(t)=0$.

В этом случае после точной математической формулировки доказано, что ошибка оптимальной линейной фильтрации стремится к нулю, причем приводится явный вид оценки $\widehat{\theta}(t)$ полезного сигнала $\theta(t)$, применение которой имеет среднеквадратическую ошибку равномерно по всем t стремящуюся к нулю:

$$\sup_t M \,|\, \widehat{\theta}(t) - \theta(t) \,|^2 \to 0,$$

при

$$\Delta = \max_k (t_k - t_{k-1}) \to 0.$$

Поскольку оценка основывается на предварительной оценке спектральных разложений (не спектральных плотностей),то одновременно оценивается спектр сигнала (теорема 1,[4,5]).(По поводу ее оптимальности см. следствие 2 к теореме 1).

Приведем математическую постановку.

В теореме 1 мы будем предполагать, что значения помехи в точках измерения 0=t0< t1<…<t4=T суть некоррелированные с.в. η(tJ); j=1…n.

$$M(\eta(t_k) - M\eta(t_k))(\eta(t_l) - M\eta(t_l)) = 0, k \neq l.$$

k,l=0…n, причем

$$M\eta(t_j) = 0, j = 0,1,...n$$
.

Дисперсии Dη(tj)=σ2(tj), таковы, что

$$\sigma^2 = \max_{0<j<n} \sigma^2(t_j) < \infty$$

С точки зрения физической постановки данные условия (условия теоремы 1) выполняются если, во-первых случайный процесс

$\eta(t)$

является стационарным процессом который часто называют физическим «белым шумом»,[2], то есть процесс спектральная плотность которого постоянна на интервале – W<t<W,

$$W \gg 1,$$

и равна нулю в остальных случаях.

Условия выполняются также в аналогичных ситуациях, если спектральная плотность «белого шума» не однородна и равна некоторой функции G(x)>0 при -W<x<W, и нулю в остальных случаях. Во-вторых, для случая когда η(t) – электромагнитный импульс столь высокой частоты, что результаты измерений даже в достаточно близких точках практически некоррелированы (или независимы).Это бывает в тех случаях когда между этими точками укладывается столь большое количество разнознаковых значений «шума», что результаты

измерений могут попасть на любые положительные или отрицательные значения траектории, практически независимо от выбора точек разбиения.

Под ошибкой оптимальной линейной фильтрации в теореме 1 мы понимаем равномерный минимум в среднеквадратическом смысле

$$\max_{t\in[0,T]}\min_{\{t_k\}}\min_{\{C_k(t)\}} M\left(\sum_{k=1}^{n} C_k(t)\xi(t_k)-\theta(t)\right)^2 = m$$,

где второй минимум берется по произвольным наборам

$$0 = t_0 = t_1 < \ldots t_n = T, n = 1,2,\ldots$$.

При каждом фиксированном t и определенном наборе

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots t_n = T,$$

теоретически существуют коэффициенты {Ck*(t), к=0,1…n},[3], обеспечивающие достижения этого минимума :

$$m = \max_{t\in[0,T]} m(t),\ m(t) = \min_{\{C_k(t)\}} M\left(\sum_{k=1}^{n} C_k(t)\xi(t_k)-\theta(t)\right)^2 =$$

$$= M\left(\sum_{k=1}^{n} C^*{}_k(t)\xi(t_k)-\theta(t)\right)^2$$

В теореме 1 мы не находим эти коэффициенты в явной форме,но приводим явную оценку, из которой следует вид асимптотически оптимальных при $n \to \infty$ коэффициентов.

Теорема 1.

Если Mη(tj)=0, j=0…n, Mη(tj) η(ti)=0, при всех tj≠ti ; i,j =0…n.

Если θ(t) непрерывно дифференцируемая неслучайная функция при всех

$$t \in [0..T],\ \max_{t\in[0...T]} \theta'(t) = C\ = const. < \infty$$

то

$$1)\quad m \to 0, \quad при \quad \Delta = \max_{1\le j\le n}\left|t_j - t_{j=1}\right| \to 0$$

$$2)\ \text{Ï ðè}\ \ \hat{\theta}(t)=\frac{\hat{a}(0)}{2}+\sum_{r=1}^{N(n)}\hat{a}(r)\cos(\frac{t\pi r}{T}),$$

$$\hat{a}(0)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\xi(t_k)(t_k-t_{k-1}),\ \hat{a}(r)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos(\frac{t_k\pi r}{T})\xi(t_k)(t_k-t_{k-1}),$$

$$r=1...N(n),$$

выполнено

$$m\le\sup_{t\in[0,T]}M(\hat{\theta}(t)-\theta(t))^2\to 0,$$

$$\Delta\to 0,\ N^2(n)\Delta\to 0.$$

(Заметим, кстати, что никаких условий на значения ξ(t) или η(t) при t≠tk, k=0,1…n в теореме 1 не требуются.)

Доказательство

$$\theta(\frac{T}{\pi}S),\ S\in[0,\pi],\ S=\frac{t\pi}{T},$$

$$\xi(\frac{T}{\pi}S)=\theta(\frac{T}{\pi}S)+\eta(\frac{T}{\pi}S).$$

$$[-\pi,0]\ ,\ \theta(\frac{T}{\pi}S),\theta(\frac{T}{\pi}S)=\frac{a(0)}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a(r)\cos(rS),\ S\in[0,\pi],$$

$$a(r)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos(Sr))\theta(\frac{T}{\pi}S)ds\ ,r=0,1....$$

Оценим сначала a(r). Используя приближение интеграла его интегральными суммами, определим оценку a(r) следующим образом :

$$\hat{a}(r)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos(\frac{t_k\pi}{T}r)\xi(t_k)(t_k-t_{k-1})\frac{\pi}{T}=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos(\frac{t_k\pi}{T}r)\theta(t_k)(t_k-t_{k-1})\frac{\pi}{T}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos(\frac{t_k\pi}{T}r)\xi(t_k)(t_k-t_{k-1})\frac{\pi}{T}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos(\frac{t_k\pi}{T}r)\eta(t_k)(t_k-t_{k-1})\frac{\pi}{T}$$

$$\hat{a}(0)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{T}\xi(t_k)(t_k-t_{k-1})=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\theta(t_k)\frac{\pi}{T}(t_k-t_{k-1})+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\eta(t_k)\frac{\pi}{T}(t_k-t_{k-1})$$

Пусть, по определению,

$$\Delta = \max_k (t_k - t_{k-1}), \Omega(N(n)) = \sum_{r=N(n)+1}^{\infty} a(r)\cos rt$$

Применяя традиционные оценки разности между интегралом и интегральной суммой,[4], и используя то, что для некоррелированных величин с нулевым математическим ожиданием

$$M\left(\sum_{k=0}^{n} s_k \eta(t_k)\right)^2 = \sum_{k=0}^{n} s_k^2 M\eta(t_k)^2,$$

$$s_k = \sum_{r=0}^{N((n))} \cos\ t_k \pi r / T\ \ (t_k - t_{k-1}),$$

получаем, что

$$M[\hat{\theta}(t)-\theta(t)]^2 = [(2/\pi)\sum_{r=1}^{N(n)}[\sum_{k=1}^{n}(\cos\frac{t_k\pi}{T})\theta(t_k)(t_k-t_{k-1}) -$$

$$-(2/\pi)\int_0^{\pi}\cos rs\ \theta(\frac{Ts}{\pi})\ ds\ ]\cos rt + \frac{\hat{a}(0)-a(0)}{2} +$$

$$+\sum_{r=1}^{N(n)}\ \sum_{k=1}^{n}\eta(t_k)[\cos\frac{t_k\pi}{T}r](t_k-t_{k-1}) - \Omega(N(n))]^2 \le$$

$$\le [G\left(N(n)+1\right)^2 \Delta^2 \max_{S,r}(\cos rS\ \ \theta(\frac{T}{\pi}S))' + \max\Omega(N(n))]^2 +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} D\eta(t_k)(t_k-t_{k-1})^2 \left(\sum_{r=0}^{N(n)}\cos rt_k \cos\frac{t_k\pi}{T}m\right)^2 \le$$

$$\le [C_1\left(1+o(1)\right)N^2(n)\Delta^2 + \max\Omega(N(n))]^2 + T\Delta\left(\max_{0\le k\le n}(D\eta(t_k))\right)(N(n)+1)^2 =$$

$$= \delta(n) \to 0,\ \ N^2(n)\Delta \to 0.$$

Мы воспользовались тем, что остаток ряда непрерывных на отрезке функций $\Omega(N(n))$, сходящийся к непрерывной функции, сходится к ней равномерно.

Часть 2) теоремы доказана. Из определения оптимальной линейной оценки θ(t),[1], и того, что при любом фиксированном t оценка $\hat{\theta}(t)$ является линейной относительно коэффициентов {ξ(tk),k=0…n} оценкой следует, что оптимальная оценка $\hat{\theta}_*(t)$ имеет ошибку меньшую чем только что оцененная величина :

$$M(\widehat{\theta}_*(t)-\theta(t))^2 \le M(\hat{\theta}(t)-\theta(t))^2 \le \delta(n) \to 0$$

где δ(n) не зависит от t.

Следствие 1

Если спектральная плотность стационарного шума имеет вид:

$$f(t)=\begin{cases} G, & t\in[-\Omega,\Omega] \\ 0, & t\in[-\Omega,\Omega] \end{cases}$$

то из оценки теоремы следует, что минимальная среднеквадратическая ошибка $m \to 0$, при условии, что точки в оценке теоремы выбраны

так, что

$$\frac{\sin\Omega t_k}{t_k}=0, M\eta^2(t_k)=G\Omega<n^{\delta}, k=0,1,...,n, G=G(n)\to c=const.>0,$$
$$\Omega=\Omega(n)\to\infty,\ 0<\delta<1, n=c_*\Omega(1+o(1)), c_*=const.,$$
$$\Delta^{1-\delta}(n)N^2(n)\to 0,\ n\to\infty.$$

Заметим, что из доказательства теоремы следует стремление к нулю среднеквадратической ошибки оценки подобной оценке нашей теоремы, в которой все значения измеряемой траектории, большие по модулю некоторого числового значения $R=n^{\varepsilon}, 0<\varepsilon<1/2,$, заменяются на это R.

В этом случае, однако, оценка перестает быть линейной и точная формулировка упомянутого факта выходит за рамки данной статьи [6; 7].

Следствие 2

Если известны все Mξ(tk)ξ(tj) Mξ(tk)η(tj), k,j=1…n, то существуют оценки более оптимальные чем оценка $\widehat{\theta}(t)$.В этом случае эти оценки находятся традиционными методами нахождения оптимальных проекций θ(t) на набор «векторов – случайных величин» ξ(t0)…ξ(tn) (См например [1]). Однако оценка теоремы 1 как и оптимальная линейная оценка имеет ошибку стремящуюся к нулю при $n\to\infty, \Delta\to 0,$ но при ее построении мы не использовали наборы чисел {

$M\xi(tk)\eta(tj)\}$ и $\{ M\xi(tk)\xi(tj) \}$, которые в свою очередь надо каким-то образом специально оценивать, причем в реальных задачах с заметной ошибкой.

Список литературы

1. Павлов А.В. Случайные ряды Фурье и их применение к теории фильтрации-прогноза. – М.: Изд-во МГУ им.М.В. Ломоносова, 2000. ISBN 5-93839-002-8. – 64 с.

2. Дэвис М.Х.Ф. Линейное оценивание и стохастическое управление. – М.: Наука, 1984. – 208 с.

3. Ватанабэ С. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / С. Ватанабэ, Н. Икэда. – М.: Наука,1986. – 448 с.

4. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Наука, 1987. – 600 с.

5. Павлов А.В. Теорема типа больших уклонений для критерия хи-квадрат // Успехи мат. наук. – 1996. – Т. 51. №1 (307). – С. 159–161.

6. Павлов А.В. Достоверное прогнозирование функций представимых в виде преобразований Лапласа или Фурье // Вестник МГТУ МИРЭА (Эл Фс 77–57811 №180414). – 2014. – №2. – С. 78–85.

7. Pavlov A.V. Отраженные функции и периодичность // International Journal of Open Information Technologies. – 2022. – Vol. 10. №6. – С. 33–39. – ISSN: 2307-8162.

8. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1987. – 688 с.