

Чижов Антон Александрович

учащийся

МБОУ «Лицей №2»

г. Красноярск, Красноярский край

Чижова Марина Александровна

канд. техн. наук, доцент

Лесосибирский филиал ФГБОУ ВО «Сибирский государственный
университет науки и технологий им. академика М.Ф. Решетнева»

г. Лесосибирск, Красноярский край

В ЧЕМ ЗАКЛЮЧАЕТСЯ МАГИЯ ФРАКТАЛОВ?

***Аннотация:** авторы подчеркивают, что фракталы – это самые разные системы, начиная от кристаллов и просто кластеров (различного рода скоплений, таких, как облака, реки, горы, материки, звёзды), заканчивая экосистемами и биологическими объектами (от листа папоротника до человеческого мозга). Фракталы являются как раз такими объектами: с одной стороны – сложные (содержащие бесконечно много элементов), с другой стороны – построенные по очень простым законам. Благодаря этому свойству, фракталы обнаруживают много общего со многими природными объектами. Но фрактал выгодно отличается от природного объекта тем, что фрактал имеет строгое математическое определение и поддаётся строгому описанию и анализу.*

***Ключевые слова:** фрактал, сферы применения, фрактальная геометрия, фрактальная теория, классификация фракталов, прикладные аспекты фрактальной теории, галерея фракталов, визуализация фракталов, программы генерации фрактальных изображений.*

Почему геометрию часто называют холодной и сухой?

Одна из причин заключается в её неспособности описать форму облака, горы, дерева или берега моря. Облака – это не сферы, горы – это не конусы, линия берега – это не

окружности, и кора не является гладкой, и молния не распространяется по прямой...

Природа демонстрирует нам не просто более высокую степень, а совсем другой уровень сложности.

Число различных масштабов длин в структурах всегда бесконечно.

Бенуа Мандельброт

Большинство систем в природе сочетают два свойства: во-первых, они очень велики, часто многогранны, многообразны и сложны, а во-вторых, они формируются под действием очень небольшого количества простых закономерностей, и далее развиваются, подчиняясь этим простым закономерностям.

Это самые разные системы, начиная от кристаллов и просто кластеров (различного рода скоплений, таких как облака, реки, горы, материки, звёзды), заканчивая экосистемами и биологическими объектами (от листа папоротника до человеческого мозга). Фракталы являются как раз такими объектами: с одной стороны – сложные (содержащие бесконечно много элементов), с другой стороны – построенные по очень простым законам. Благодаря этому свойству, фракталы обнаруживают много общего со многими природными объектами.

Но фрактал выгодно отличается от природного объекта тем, что фрактал имеет строгое математическое определение и поддаётся строгому описанию и анализу.

Поэтому теория фракталов позволяет предсказать скорость роста корневых систем растений, трудозатраты на осушение болот, зависимость массы соломы от высоты побегов и многое другое. Это новое направление в математике, совершившее в научной парадигме переворот, сравнимый по значимости с теорией относительности и квантовой механикой. Объекты фрактальной геометрии по своему внешнему виду резко отличаются от привычных «правильных» геометрических фигур. Фактически, это прорыв в математическом описании систем, которые на протяжении долгого времени такому описанию не поддавались. Фрактальные множества обладают рядом необычных характеристик. Так, при

«макроскопическом» измерении их длины она зависит от длины отрезка, которым проводится измерение. При аналитическом вычислении часто оказывается, например, что длина бесконечна, а площадь равна нулю. Следовательно, такие объекты не могут считаться ни одномерными, ни двумерными. Для них разработано понятие размерности, способной принимать дробные значения. Фрактальная геометрия не есть «чистая» геометрическая теория. Это скорее концепция, новый взгляд на хорошо известные вещи, перестройка восприятия, заставляющая исследователя по-новому видеть мир.

Современные математические модели настолько красивы и загадочны, что могут свести с ума впечатлительного студента и ученого. Разноцветные изображения фракталов поражают своей совершенной гармонией. В своей работе мы хотели бы показать мир фракталов, его красоту и неизведанность.

«Всякая книга природы написана языком математики» (Галилей).



Рис. 1. Бенуа Мандельброт – отец современной фрактальной теории

Бенуа Мандельброт родился в Варшаве 20 ноября 1924 году в семье литовских евреев. Но уже в 1936 году семья Бенуа Мандельброта эмигрировала во Францию, в Париж. В Париже он попал под влияние своего дяди Шолема Мандельброта, известного парижского математика, члена группы математиков, известной под общим псевдонимом Николя Бурбаки.

После начала войны Мандельброты бежали на свободный от оккупации юг Франции, в городок Тюль. Там Бенуа Мандельброт пошел в школу, но вскоре потерял интерес к учебе. Поэтому к шестнадцати годам он еле знал алфавит и таблицу умножения до пяти. Но у Бенуа Мандельброта открылся необычный математический дар, который позволил ему сразу после войны стать студентом Сорбонны. Оказалось, что у Бенуа великолепное пространственное

воображение. Он даже алгебраические задачи решал геометрическим способом. Оригинальность его решений позволила Бенуа Мандельброту поступить в университет.

Окончив университет, Бенуа Мандельброт сначала стал «чистым математиком». Он получил докторскую степень.

В 1958 он переехал в США, где приступил к работе в научно-исследовательском центре IBM в Йорктауне, поскольку IBM в то время занималась как раз интересными Бенуа Мандельброту областями математики.

Работая в IBM, Бенуа Мандельброт ушел далеко в сторону от чисто прикладных проблем компании. Он работал в области лингвистики, теории игр, экономики, авиации, географии, физиологии, астрономии, физики. Ему нравилось именно переключаться с одной темы на другую, изучать различные направления. Исследуя экономику, Бенуа Мандельброт обнаружил, что произвольные внешние колебания цены могут следовать скрытому математическому порядку во времени, который не описывается стандартными кривыми.

Бенуа Мандельброт занялся изучением статистики цен на хлопок за большой период времени (более ста лет). Колебания цен в течение дня казались случайными, но Мандельброт смог выявить тенденцию их изменения. Он проследил симметрию в длительных колебаниях цены и колебаниях кратковременных. Это открытие оказалось неожиданностью для экономистов.

По сути, Бенуа Мандельброт применил для решения этой проблемы зачатки своего рекурсивного (фрактального) метода. Само понятие «фрактал» придумал сам Бенуа Мандельброт (от латинского *fractus*, означающего «сломанный, разбитый») [5]. Первые примеры самоподобных множеств с необычными свойствами появились в XIX веке (например, множество Кантора). Впервые множество Мандельброта было описано в 1905 году Пьером Фату (Pierre Fatou), французским математиком, работавшим в области аналитической динамики комплексных чисел. Фату никогда не видел изображений, которые мы сейчас знаем как изображения множества Мандельброта, потому что необходимое количество

вычислений невозможно провести вручную. Профессор Бенуа Мандельброт был первым, кто использовал для этого компьютер.

Фракталы были описаны Мандельбротом в 1975 году в его книге «Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimension» («Фрактальные объекты: форма, случайность и размерность»). В этой книге Мандельброт впервые использовал термин «фрактал» для обозначения математического феномена, демонстрирующего столь непредсказуемое и удивительное поведение. Эти феномены рождались при использовании рекурсивного алгоритма для получения какой-либо кривой или множества. Множество Мандельброта – один из таких феноменов, названный по имени своего исследователя.

14 октября 2010 года скончался Бенуа Мандельброт – человек, подаривший миру фрактальную геометрию. Он умер от рака в обычном хосписе в городе Кембридж, штат Массачусетс, в возрасте 85 лет [9].

Современная фрактальная теория.

Многие природные системы настолько сложны и нерегулярны, что использование только знакомых объектов классической геометрии для их моделирования представляется безнадежным. Как, к примеру, построить модель множества Мандельброта и Жюлиа, Снежинку Коха, ковер Серпинского в терминах геометрии? Как описать то многообразие биологических конфигураций, которое мы наблюдаем в мире растений и животных? Представьте себе всю сложность системы кровообращения, состоящей из множества капилляров и сосудов и доставляющей кровь к каждой клеточке человеческого тела. Представьте, как хитроумно устроены легкие и почки, напоминающие по структуре деревья с ветвистой кроной.

Столь же сложной и нерегулярной может быть и динамика реальных природных систем. Как подступиться к моделированию каскадных водопадов или турбулентных процессов, определяющих погоду?

Фракталы – подходящие средства для исследования поставленных вопросов. Термин *фрактал* относится к некоторой статичной геометрической конфигурации, такой, как мгновенный снимок водопада. Нередко то, что мы

наблюдаем в природе, интригует нас бесконечным повторением одного и того же узора, увеличенного или уменьшенного во сколько угодно раз. Например, у дерева есть ветви. На этих ветвях есть ветки поменьше и т. д. Теоретически, элемент «разветвление» повторяется бесконечно много раз, становясь все меньше и меньше. То же самое можно заметить, разглядывая фотографию горного рельефа.

Многие замечательные свойства фракталов открываются при изучении итерированных отображений. Замечательного прогресса в изучении отображений добились Гистон Жюлиа и Пьер Фату (1919). Естественно, все было сделано без помощи компьютерной графики.

Изучение фракталов открывает изумленному взгляду совершенно новый мир пластичной красоты. Кроме того, они открывают замечательные возможности, как исследованию бесконечного числа приложений, так и в области чистой математики. Но в то же время, как это часто случается в так называемой *новой* математике, открытия опираются на пионерские работы великих математиков прошлого. Сэр Исаак Ньютон понимал это, говоря: *«Если я и видел дальше других, то только потому, что стоял на плечах гигантов»*.

Фракталы. Вы, конечно же, видели эти захватывающие картинки из Bryce3d более реальные, чем сама реальность. Горы, облака, кора дерева – все это выходит за рамки привычной евклидовой геометрии. Мы не можем описать камень или границы острова с помощью прямых, кружков и треугольников. И здесь нам приходят на помощь фракталы. Что же это за знакомые незнакомцы? Когда они появились?

Первые идеи фрактальной геометрии возникли в 19 веке. Кантор с помощью простой рекурсивной (повторяющейся) процедуры превратил линию в набор несвязанных точек (так называемая Пыль Кантора) рисунок 2.1. Он брал линию и удалял центральную треть и после этого повторял то же самое с оставшимися отрезками. Пеано нарисовал особый вид линии (рисунок 2.2). Для ее рисования Пеано использовал следующий алгоритм.



Рис. 2.1. Фрактал Пыль Кантора

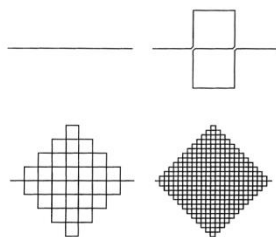


Рис. 2.2. Фрактал Линии Пеано

На первом шаге он брал прямую линию и заменял ее на 9 отрезков длиной в 3 раза меньшей, чем длина исходной линии (части 1 и 2 рисунка 2.2). Далее он делал то же самое с каждым отрезком получившейся линии. И так до бесконечности. Ее уникальность в том, что она заполняет всю плоскость. Доказано, что для каждой точки на плоскости можно найти точку, принадлежащую линии Пеано. Кривая Пеано и пыль Кантора выходили за рамки обычных геометрических объектов. Они не имели четкой размерности. Пыль Кантора строилась вроде бы на основании одномерной прямой, но состояла из точек (размерность 0). А кривая Пеано строилась на основании одномерной линии, а в результате получалась плоскость. Во многих других областях науки появлялись задачи, решение которых приводило к странным результатам, на подобие описанных выше (Броуновское движение, цены на акции).

Классификация фракталов.

В своей повседневной жизни мы постоянно встречаемся с размерностями. Мы прикидываем длину дороги (250 м), узнаем площадь квартиры (78 м²) и ищем на наклейке объем бутылки пива (0.33 дм³). Это понятие вполне интуитивно ясно и, казалось бы, не требует разъяснения. Линия имеет размерность 1. Это означает, что, выбрав точку отсчета, мы можем любую точку на этой линии

определить с помощью 1 числа – положительного или отрицательного. Причем это касается всех линий – окружность, квадрат, парабола и т. д.

Размерность 2 означает, что любую точку мы можем однозначно определить двумя числами. Не надо думать, что двумерный – значит плоский. Поверхность сферы тоже двумерна (ее можно определить с помощью двух значений – углов наподобие ширины и долготы).

Если смотреть с математической точки зрения, то размерность определяется следующим образом: для одномерных объектов – увеличение в два раза их линейного размера приводит к увеличению размеров (в данном случае длины) в два раза (2^1).

Для двумерных объектов увеличение в два раза линейных размеров приводит к увеличению размера (например, площадь прямоугольника) в четыре раза (2^2).

Для 3-мерных объектов увеличение линейных размеров в два раза приводит к увеличению объема в восемь раз (2^3) и так далее.

Таким образом, размерность D можно рассчитать исходя из зависимости увеличения «размера» объекта S от увеличения линейных размеров L . Для линии. Для плоскости. Для объема. Может быть, немного запутано, но, в общем-то, несложно и понятно.

Попробуем посчитать размерность для кривой Пеано. Итак, у нас исходная линия, состоящая из трех отрезков длины X , заменяется на 9 отрезков втрое меньшей длины. Таким образом, при увеличении минимального отрезка в 3 раза длина всей линии увеличивается в 9 раз и – двумерный объект!!!

Так вот, когда размерность фигуры, получаемой из каких-то простейших объектов (отрезков) больше размерности этих объектов, – мы имеем дело с фракталом.

Фракталы делятся на группы. Самые большие группы это:

- геометрические фракталы;
- алгебраические фракталы;
- системы итерируемых функций;

– стохастические фракталы.

Видно, что фрактал Мандельброта и Кривая Коха – разные типы фракталов. У них есть общее – рекурсивная процедура при генерации, но есть отличия. Поэтому для их изучения следует разделить их на определенные классы. Одной из общепринятых классификаций является классификация фракталов на геометрические, алгебраические и стохастические (см. таблицу).



Рис. 3.1. Классификация фракталов

Геометрические фракталы.

Именно с них началась история фракталов. Это и есть те функции-монстры, которых так называли за недифференцируемость в каждой точке. Геометрические фракталы являются также самыми наглядными, т. к. сразу видна самоподобность. Вообще все геометрические фракталы обладают самоподобностью, не изменяющейся при изменении масштаба. Для построения геометрических фракталов характерно задание «основы» и «фрагмента», повторяющегося при каждом уменьшении масштаба. Поэтому эти фракталы иногда называют конструктивными или автомоделными.

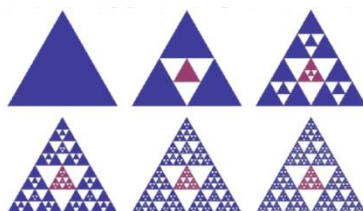


Рис. 3.2. Фрактал треугольники Серпинского

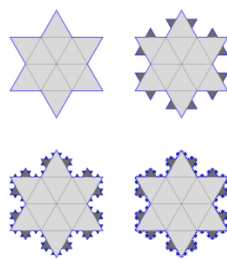


Рис. 3.3. Фрактал снежинка Коха

Примерами таких фракталов являются Треугольник Серпинского, Снежинка Коха, Кривые Леви и Минковского и многие другие.

В графике геометрические фракталы применяются для получения изображений деревьев, кустов, береговых линий и т. д.

Конструктивные фракталы строятся с помощью рекурсивных процедур, систем итерированных функций, L-систем, и др.

Алгебраические фракталы.

Вторая большая группа фракталов – алгебраические. Свое название они получили, за то, что их строят, используя простые алгебраические формулы.

Получают их с помощью нелинейных процессов в n -мерных пространствах. Известно, что нелинейные динамические системы обладают несколькими устойчивыми состояниями. Состояние, в котором окажется динамическая система после некоторого числа итераций, зависит от начальных условий. Поэтому каждое устойчивое состояние (аттрактор) обладает некоторой областью начальных состояний, при которых система обязательно перейдет в рассматриваемые конечные состояния. Таким образом, фазовое пространство разбивается на области притяжения аттракторов.

Самыми известными из них являются множества Мандельброта и Жюлиа, Бассейны Ньютона и т. д.

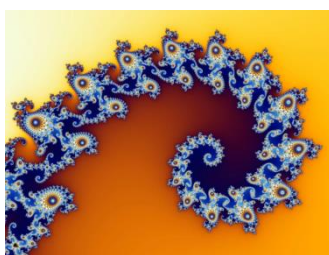


Рис. 3.4. Множество Мандельброта

Стохастические фракталы.

Кривая Коха, как бы ни была похожа на границу берега, не может выступать в качестве ее модели из-за того, что она всюду одинакова, самоподобна, а в действительности это не так. Все природные объекты создаются по капризу природы, и есть случайность в этом процессе.

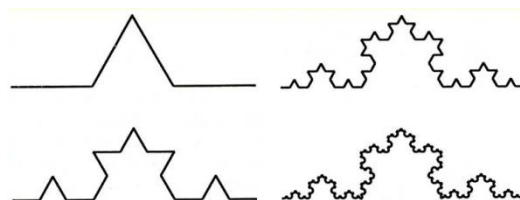


Рис. 3.5. Фрактал кривая Коха

Фракталы, при построении которых в итеративной системе случайным образом изменяются какие-либо параметры, называются стохастическими. Термин «стохастичность» происходит от греческого слова, обозначающего «предположение».

Также примером случайности в природе является броуновское движение. С помощью компьютера такие процессы строить достаточно просто, т. к. он позволяет генерировать последовательности случайных чисел. Эти фракталы используются при моделировании рельефов местности и поверхности морей, процесса электролиза.

Типичный представитель данного класса фракталов «Плазма».

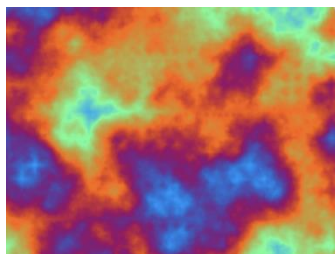


Рис. 3.6. Фрактал Плазма

Для ее построения возьмем прямоугольник и для каждого его угла определим цвет. Далее находим центральную точку прямоугольника и раскрашиваем ее

в цвет, равный среднему арифметическому цветов по углам прямоугольника плюс некоторое случайное число. Чем больше случайное число – тем более «рваным» будет рисунок. Если мы теперь скажем, что цвет точки – это высота над уровнем моря – получим вместо плазмы – горный массив. Именно на этом принципе моделируются горы в большинстве программ. С помощью алгоритма, похожего на плазму строится карта высот, к ней применяются различные фильтры, накладываем текстуру и, пожалуйста, фотореалистичные горы готовы.

Системы итерируемых функций (IFS – Iterated Function Systems).

Эта группа фракталов получила широкое распространение, благодаря работам Майкла Барнсли из технологического института штата Джорджия.

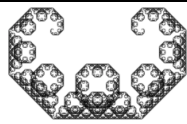
Он пытался кодировать изображения с помощью фракталов. Запатентовав несколько идей по кодированию изображений с помощью фракталов, он основал фирму «Iterated Systems», которая через некоторое время выпустила первый продукт «Images Incorporated», в котором можно было изображения переводить из растровой формы во фрактальную FIF. Это позволяло добиться высоких степеней сжатия. При низких степенях сжатия качество рисунков уступало качеству формата JPEG, но при высоких картинки получались более качественными. В любом случае, этот формат не прижился, но работы по его усовершенствованию ведутся до сих пор. Ведь этот формат не зависит от разрешения изображения. Так как изображение закодировано с помощью формул, то его можно увеличить до любых размеров и при этом будут появляться новые детали, а не просто увеличится размер пикселей. Хуже это или лучше – решать надо в каждом отдельном случае.

Если в L-systems (алгебраических фракталах) речь шла о замене прямой линии неким полигоном, то в IFS мы в ходе каждой итерации заменяем некий полигон (квадрат, треугольник, круг) на набор полигонов, каждый из которых подвергнут аффинным преобразованиям. При аффинных преобразованиях исходное изображение меняет масштаб, параллельно переносится вдоль каждой из осей и вращается на некоторый угол.

В результате можно получить потрясающие коэффициенты сжатия. Например, рисунок папоротника кодируется с помощью 28!!! цифр и один и тот же рисунок получается вне зависимости от того, что взяли за основу – прямоугольник, круг, треугольник или что-либо еще. К сожалению, процесс создания набора коэффициентов для произвольного изображения очень трудоемок и занимает очень много времени. Примеры приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1

Простые СИФ-фракталы

Папоротник	 Рис. 5
Фрактал Леви	 Рис. 6

Фракталы и хаос.

«– Из-за такой малости! Из-за бабочки! – закричал Экельс. Она упала на пол, изящное маленькое создание, способное нарушить равновесие, повалились маленькие костяшки домино... большие костяшки... огромные костяшки, соединенные цепью неисчислимых лет, составляющих Время». Р. Брэдбери. «И грянул гром».

Понятие фрактал неразрывно связано с понятием хаос. Хаос – это отсутствие предсказуемости. Хаос возникает в динамических системах, когда для двух очень близких начальных значений система ведет себя совершенно по-разному. Пример хаотичной динамической системы – погода. Метеорологи шутят: «Взмах крыла бабочки в Техасе приводит к урагану во Флориде».

Насколько упорядочена наша жизнь? Предопределены ли в ней те или иные события? Что предсказуемо на многие годы вперед, а что не подлежит сколько-нибудь надежному прогнозированию даже на небольшие интервалы времени?

Человеку постоянно приходится сталкиваться как с упорядоченными, так и с неупорядоченными процессами, порождаемыми различными динамическими системами. Мы знаем, что Солнце встает и заходит каждые 24 часа, и так будет продолжаться в течение всей нашей жизни. Вслед за зимой всегда наступает весна, и вряд ли когда-нибудь будет наоборот. Более или менее регулярно функционируют коммунальные службы, снабжающие нас светом и теплом, учреждения и магазины, а также транспортные системы (автобусы, троллейбусы, метро, самолеты, поезда). Нарушения ритмичной работы этих систем вызывают законное возмущение и негодование граждан. Если сбои возникают неоднократно – говорят о *хаосе*, выражая отрицательное отношение к подобным явлениям.

Но в то же время существуют процессы, хорошо известные своей непредсказуемостью. Например, подбрасывая монету, мы никогда точно не знаем, что выпадет – «орел» или «решка». Такая непредсказуемость не вызывает тревоги. К гораздо более драматичным последствиям она может привести при игре в рулетку, однако любители испытывать судьбу сознательно идут на этот риск.

Почему одни процессы предсказуемы по своим результатам, а другие нет? Может быть, нам просто не хватает каких-то начальных данных для хорошего прогноза? Надо улучшить знания о начальных условиях – и все будет в порядке и с монетой, и с предсказанием погоды. Сказал же Лаплас: «...Дайте мне начальные условия для всей Вселенной, и я вычислю ее будущее». Лаплас ошибался: ему и его современникам не были известны примеры детерминированных динамических систем, прогноз поведения которых на длительное время нельзя осуществить. Лишь в конце XIX столетия французский математик Анри Пуанкаре впервые почувствовал, что такое возможно. Однако прошло еще три четверти века, прежде чем началась эпоха бурного изучения детерминированного хаоса. Динамические системы можно условно разделить на два типа. У первых траектории движения устойчивы и не могут быть значительно изменены малыми возмущениями. Такие системы предсказуемы – именно потому мы знаем, что Солнце взойдет завтра, через год и через сто лет. Для определения будущего в этом случае достаточно знать уравнения движения и задать начальные условия.

Небольшие изменения в значениях последних приведут лишь к несущественной ошибке в прогнозе.

К другому типу относятся динамические системы, поведение которых неустойчиво, так что любые сколь угодно малые возмущения быстро (в масштабе времени, характерном для этой системы) приводят к кардинальному изменению траектории. Как отметил Пуанкаре в своей работе «Наука и метод» (1908), в неустойчивых системах «совершенно ничтожная причина, ускользающая от нас по своей малости, вызывает значительное действие, которое мы не можем предусмотреть. <...> Предсказание становится невозможным, мы имеем перед собой явление случайное».

Природные фракталы.

Распространенность фрактальных объектов в природе чрезвычайно велика. Фрактальный характер могут иметь пористые минералы и горные породы; узоры листьев, расположение ветвей деревьев, капиллярная система растений; кровеносная, нервная, лимфатическая и др. системы в организмах животных и человека; реки, облака, линия морского побережья, горный рельеф, «морозные» узоры на стекле, снежинка – природный аналог кривой Коха, биение сердца, волнение моря, распределение пузырьков в приповерхностном слое океана, дно океанов и морей, осадки на дне океана. Фрактальная организация прослеживается в картине разветвления некоторых сердечных мышечных волокон и в так называемой системе Гиса, передающей электрические сигналы от предсердий к желудочкам. Кардиограмма – тоже фрактальная кривая. Природа не даром «любит» фрактальные формы. Это объясняется именно тем, что они получаются путем простого размножения и изменения размеров некоего одного элементарного строительного блока.

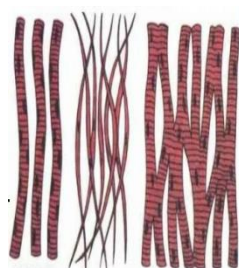


Рис. 3.7. Фракталы волокон Гиса

Прикладные аспекты фрактальной теории.

Фракталы – уникальные объекты, порожденные непредсказуемыми движениями хаотического мира. Их находят в местах таких малых, как клеточная мембрана, и таких огромных, как Солнечная система...

Одни из наиболее мощных приложений фракталов лежат в *компьютерной графике*. Во-первых, это фрактальное сжатие изображений, и, во-вторых, построение ландшафтов, деревьев, растений и генерирование фрактальных текстур. Склонность фракталов походить на горы, цветы и деревья эксплуатируется некоторыми *графическими редакторами*, например фрактальные облака из 3D studio MAX, фрактальные горы в World Builder. Деревья, горы и целые пейзажи задаются простыми формулами, легко программируются и не распадаются на отдельные треугольники и кубики при увеличении деталей.

Фракталы находят все большее и большее применение в *науке*. Основная причина этого заключается в том, что они описывают реальный мир иногда даже лучше, чем традиционная физика или математика. Вот несколько примеров.

1. Наиболее полезным использованием фракталов в компьютерной науке является фрактальное сжатие данных. В основе этого вида сжатия лежит тот факт, что реальный мир хорошо описывается фрактальной геометрией. При этом картинки сжимаются гораздо лучше, чем это делается обычными методами (такими, как jpeg или gif). Другое преимущество фрактального сжатия в том, что при увеличении картинки, не наблюдается эффекта пикселизации (увеличения размеров точек до размеров, искажающих изображение). При фрактальном же сжатии, после увеличения, картинка часто выглядит даже лучше, чем до него.

2. Изучение турбулентности в потоках очень хорошо подстраивается под фракталы. Турбулентные потоки хаотичны, и поэтому их сложно точно смоделировать. Здесь помогает переход к фрактальному представлению, что сильно облегчает работу инженерам и физикам, позволяя им лучше понять динамику сложных потоков.

3. При помощи фракталов также можно смоделировать языки пламени.

4. Пористые материалы хорошо представляются во фрактальной форме в связи с тем, что они имеют очень сложную геометрию. Это используется в нефтяной науке.

5. Для передачи данных на расстояния используются антенны, имеющие фрактальные формы, что сильно уменьшает их размеры и вес.

6. Фракталы используются для описания кривизны поверхностей. Неровная поверхность характеризуется комбинацией из двух разных фракталов.

7. Биения сердца

8. Моделирование хаотических процессов, в частности при описании моделей популяций.

9. Онтогенез (индивидуальное развитие организма) есть краткое и частное повторение филогенеза (историческое развитие вида) этого вида – то есть, жизнь человека и существование человечества вообще – это тоже фрактал.

Наиболее полезным использованием фракталов в компьютерной науке является фрактальное сжатие данных. В основе этого вида сжатия лежит тот факт, что реальный мир хорошо описывается фрактальной геометрией. При этом картинки сжимаются гораздо лучше, чем это делается обычными методами (такими как jpeg или gif). Другое преимущество фрактального сжатия в том, что при увеличении картинки, не наблюдается эффекта пикселизации (увеличения размеров точек до размеров, искажающих изображение). При фрактальном же сжатии, после увеличения, картинка часто выглядит даже лучше, чем до него.

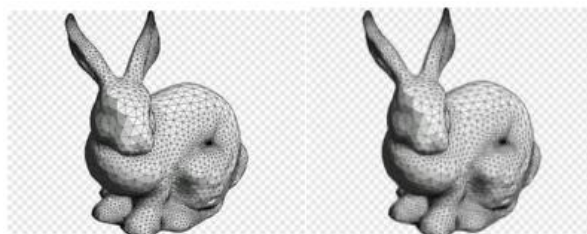


Рис. 4.1. Компьютерная графика

Фракталы широко применяются в компьютерной графике для построения изображений природных объектов, таких, как деревья, кусты, горные ландшафты, поверхности морей и т. д.

Физика и другие естественные науки.

В физике фракталы естественным образом возникают при моделировании нелинейных процессов, таких, как турбулентное течение жидкости, сложные процессы диффузии-адсорбции, пламя, облака и т. п. Также фракталы используются при моделировании пористых материалов, например, в нефтехимии. В биологии они применяются для моделирования популяций и для описания систем внутренних органов (система кровеносных сосудов).



Рис. 4.2. Турбулентное течение жидкости

Децентрализованные сети.

Система назначения IP-адресов в сети NETSUKUKU использует принцип фрактального сжатия информации для компактного сохранения информации об узлах сети. Каждый узел сети NETSUKUKU хранит всего 4 Кб информации о состоянии соседних узлов, при этом любой новый узел подключается к общей сети без необходимости в центральном регулировании раздачи IP-адресов, что, например, характерно для сети Интернет.

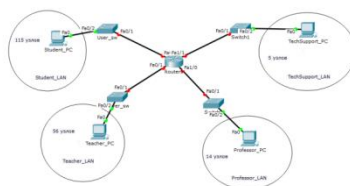


Рис. 4.3. Система назначения IP-адресов в сети

Таким образом, принцип фрактального сжатия информации гарантирует полностью децентрализованную, а следовательно, максимально устойчивую работу всей сети.

Радиотехника.

Использование фрактальной геометрии при проектировании антенных устройств было впервые применено американским инженером Натаном Коэном, который тогда жил в центре Бостона, где была запрещена установка внешних антенн на здания. Натан вырезал из алюминиевой фольги фигуру в форме кривой Коха и наклеил её на лист бумаги, затем присоединил к приёмнику.



Рис. 4.4. Антенное устройство Коэна

Оказалось, что такая антенна работает не хуже обычной. И, хотя физические принципы работы такой антенны не изучены до сих пор, это не помешало Коэну основать собственную компанию и наладить их серийный выпуск.

Дизайн.

Прежде всего, фракталы – область удивительного математического искусства, когда с помощью простейших формул и алгоритмов получаются картины необычайной красоты и сложности! Сейчас стало модным использовать для оригинального и неповторимого оформления дома, офиса, ресторана или клуба фрактальные изображения.



Рис. 4.5. Фракталы в дизайне интерьера

Фрактальная наука ещё очень молода, и ей предстоит большое будущее. Задачи, которые открываются перед новой областью математики – фрактальной геометрией, – сложны и многообразны. Цель работы заключалась в расширении знаний, связанных с понятием «фрактал» и сферами применения в жизни человека.

В ходе работы познакомились с создателем фрактальной геометрии, а также ознакомились с современной фрактальной теорией, представили классификацию фракталов, раскрыли прикладные аспекты фрактальной теории.

В результате получилось собрать галерею фракталов, представить визуализацию некоторых видов фракталов, представить некоторые программы генерации фрактальных изображений.

Если раньше ученым приходилось иметь дело, в основном, с числами и формулами, то теперь их работа стала гораздо интереснее. С помощью компьютеров они могут рисовать большие красивые картинки изучаемых явлений. Некоторые из ученых так увлеклись этим, что стали художниками, и сегодня простая любопытность математиков, коей являлись фракталы еще в начале 80-х, превратилась в уважаемый вид искусства. Выставки фрактальных изображений проходят в музеях всего мира, большое количество конкурсов проводится в компьютерной сети Интернет.

Фракталы стали незаменимыми помощниками астрофизиков, медиков, геологов. Фрактальное моделирование как инструмент для изучения неупорядоченных систем, каковыми являются нефтегазовые месторождения, стало технологической потребностью. Фрактальные модели упрощают анализ движения жидкости или газа, что важно для промышленных технологий разработки месторождений нефти и газа. Модели, построенные на основе фрактальных изображений, позволяют с большой точностью моделировать космическое пространство и ткани внутренних органов живых организмов.

Фракталам посвящены тысячи публикаций и огромные ресурсы в международной компьютерной сети Интернет, однако для многих специалистов далеких от информатики данный термин представляется абсолютно новым. Поэтому фракталы, как объекты, представляющие интерес для специалистов различных отраслей знания, должны получить надлежащее место в курсах математики и информатики.

Приложение 1.

Галерея фракталов.

Таблица П 1

Алгебраические фракталы

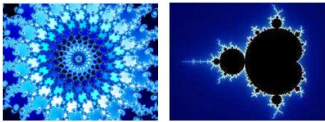
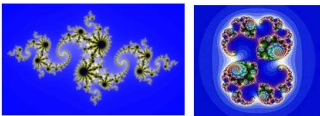
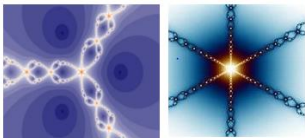
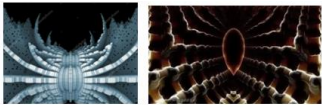
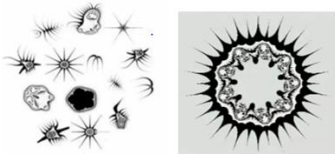
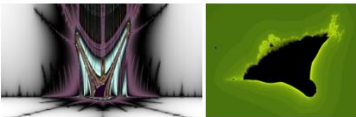
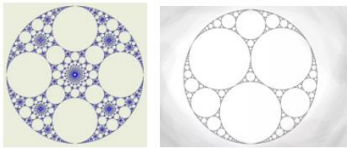
Множество Мандельброта	 Рис. 7
Множество Жюлиа	 Рис. 8
Бассейны (фракталы) Ньютона	 Рис. 9
Паук	 Рис. 10
Биоморфы – «первооткрыватель» Клиффорд Пикоувер	 Рис. 11
Горящий Корабль	 Рис. 12
Крест	 Рис. 13
Множество Аполлона	 Рис. 14

Таблица П 1. Продолжение

Алгебраические фракталы

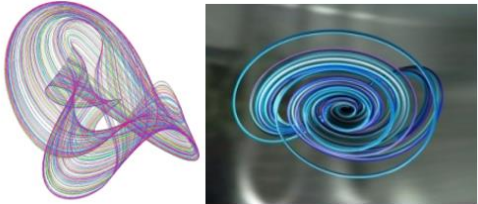
Вихри	 Рис. 15
Аттрактор Лоренца	 Рис. 16

Таблица П 2

Геометрические фракталы

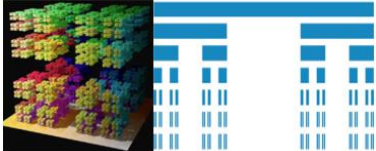
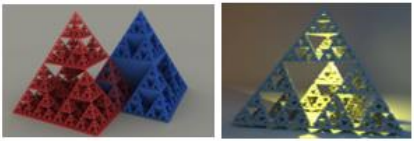
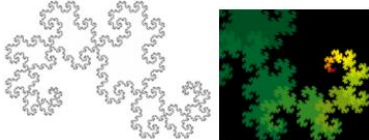
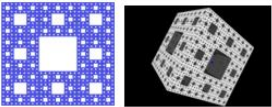
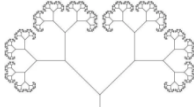
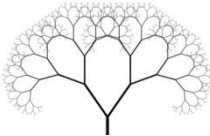
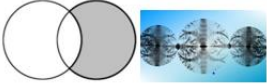
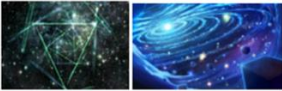
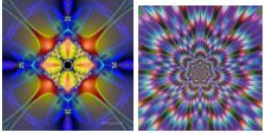
Кривая Леви	 Рис. 17
Двумерное множество Кантора	 Рис. 18
Треугольник Серпинского	 Рис. 19
Ломаная (кривая) дракона (Фрактал Хартера – Хейтуэя)	 Рис. 20

Таблица П 2. Продолжение

Геометрические фракталы

Ковер Серпинского	 Рис. 21
Двоичное дерево	 Рис. 22
Троичное дерево	 Рис. 23
Фрактал Минковского	 Рис. 24
Целующиеся круги	 Рис. 25
Звездный фрактал	 Рис. 26
Дерево Пифагора	 Рис. 27
Кинескоп	 Рис. 28
Кривая Коха(снежинка Коха)	 Рис. 29

Природные фракталы

Разряд молнии	
	Рис. 30
Трещины в сухой глине	
	Рис. 31
Растение	
	Рис. 32
Побег папоротника	
	Рис. 33
Лишайник на камне	
	Рис. 34
Высоко-кучевые облака	
	Рис. 35
Большая волна	
	Рис. 36
Снежинка	
	Рис. 37
Кроны деревьев	
	Рис. 38

Таблица П 3. Продолжение

Природные фракталы

Ягель	 Рис. 39
-------	--

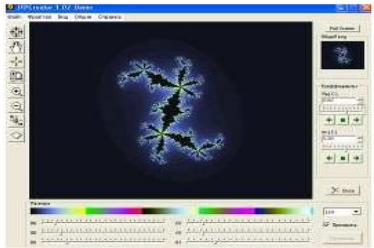
Приложение 2.

Программы для создания изображений фракталов.

Существует множество программ, служащих для генерации фрактальных изображений. Рассмотрим три из них.

Таблица П 2

Программы для создания изображений фракталов

 Рис. 40	JFPCreator. Программа демонстрирует очень красивый фрактал Джулия, его бесконечные трансформации при изменении коэффициентов в реальном времени, полноэкранный вид, слайд-шоу. Позволяет и во время трансформации менять параметры палитры и её тип, масштаб и область просмотра. Сохраняет созданные изображения во фрактальном формате (очень компактно и без потери качества) и в BMP с выбранным разрешением. Форма для расчета и сохранения в BMP формате позволяет выбрать размер сохраняемого изображения в миллиметрах, сантиметрах, дюймах и метрах, разрешение в dpi
--	---

Программы для создания изображений фракталов



Рис. 41

Ultra Fractal – лучшее решение для создания уникальных фрактальных изображений профессионального качества. Пакет отличается дружелюбным интерфейсом, многие элементы которого напоминают интерфейс Photoshop (что упрощает изучение), и сопровождается невероятно подробной и прекрасно иллюстрированной документацией. Созданные изображения можно визуализировать в высоком разрешении, пригодном для полиграфии, и сохранить в собственном формате программы или в одном из популярных фрактальных форматов. Визуализированные изображения также могут быть экспортированы в один из растровых графических форматов (jpg, bmp, png и psd), а готовые фрактальные анимации – в AVI-формат. Принцип создания фрактальных изображений достаточно традиционен, самое простое – воспользоваться одной из прилагаемых в поставке формул (сориентироваться относительно возможного вида генерируемого по выбранной формуле изображения поможет встроенный браузер), а затем отредактировать параметры формулы желаемым образом. Однако не стоит думать, что таинство фрактального изображения кроется лишь в удачной формуле. Не менее важны и иные аспекты. Например, цветовая настройка, предполагающая выбор варианта окраски и точную настройку ее параметров. Настройка цвета реализована на уровне солидных графических пакетов, например градиенты можно создавать и настраивать самостоятельно, корректируя множество параметров, включая полупрозрачность, и сохранять их в библиотеке для дальнейшего использования. Применение слоев с возможностью изменения режимов их смешивания и корректировкой полупрозрачности позволяет генерировать многослойные фракталы и за счет наложения фрактальных изображений друг на друга добиваться уникальных эффектов. Использование масок непрозрачности обеспечивает маскирование определенных областей изображения. Фильтры трансформации позволяют выполнять в отношении выделенных фрагментов изображения разнообразные преобразования: масштабировать, зеркально отражать, обрезать по шаблону, искажать посредством завихрения или ряби, размножать по принципу калейдоскопа и т. д.

Таблица П 2. Продолжение

Программы для создания изображений фракталов



Рис. 42

Апофизис – интересный инструмент для генерации фракталов на основе базовых фрактальных формул. Созданные по готовым формулам фракталы можно редактировать и неузнаваемо изменять, регулируя разнообразные параметры. Так, например, в редакторе их можно трансформировать, либо изменив лежащие в основе фракталов треугольники, либо применив понравившийся метод преобразования: волнообразное искажение, перспективу, размытие по Гауссу и др. Затем стоит поэкспериментировать с цветами, выбрав один из базовых вариантов градиентной заливки. Список встроенных заливок достаточно внушителен, и при необходимости можно автоматически подобрать наиболее подходящую заливку к имеющемуся растровому изображению, что актуально, например, при создании фрактального фона в том же стиле, что и иные изображения некоего проекта. При необходимости несложно подрегулировать гамму и яркость, изменить фон, масштабировать фрактальный объект и уточнить его расположение на фоне. Можно также подвергнуть результат разнообразным мутациям в нужном стиле. По окончании следует задать размеры конечного фрактального изображения и записать его визуализированный вариант в виде графического файла (jpg, bmp, png)

Список литературы

1. Кириллов А.А. Повесть о двух фракталах / А.А. Кириллов // Летняя школа «Современная математика». – М.: МЦНМО, 2016. – 180 с.
2. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт. – М.: Институт компьютерных исследований, 2015. – 656 с.
3. Пайтген Х.-О. Красота фракталов / Х.-О. Пайтген, П.Х. Рихтер. – М.: Мир, 1993. – 176 с.
4. Федер Е. Фракталы / Е. Федер. – М: Мир, 1991. – 261 с.
5. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://ru.wikipedia.org> (дата обращения: 07.12.2022).
6. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.metaphor.ru/er/misc/fractal_gallery.xml (дата обращения: 07.12.2022).

7. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.codenet.ru/progr/fract/Fractals-Around/> (дата обращения: 07.12.2022).
8. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.3dfractal.ru/index.php/magazinfractalov> (дата обращения: 07.12.2022).
9. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://lenta.ru/articles/2010/10/18/mandelbrot/> (дата обращения: 07.12.2022).