Павлов Андрей Валерианович

канд. физ.-мат. наук, доцент

ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический

университет радиотехники, электроники и автоматики»

г. Москва

DOI 10.21661/r-558960

НЕЕДИНСТВЕНОСТЬ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

***Аннотация**: в статье автор по формуле F(p) = f(-x + iy) определяет поле сдвигов аналитической функции f (p), p = x+iy, и любое значение этого поля в правой полуплоскости получается сдвигом вправо на величину 2A значений функции на вертикальной линии x=-A левой полуплоскости при всех действительных положительных A. Отмечается, что данное поле является результатом отражения значений функции y=f(-p) на вертикальных линиях x=A относительно точки (A,0) при всех A>0. Автором доказано, что в относительно общих условиях поле сдвигов совпадает с самой аналитической функцией, если рассматривать ее значения на многообразии точек (x, y, u, v) при f(p)=u + iv в области своей аналитичности. Аналогичный результат получается в следствие гармонического продолжения мнимой части функции f(p) через мнимую ось в правую полуплоскость в случае действительности исходной функции на мнимой оси.*

***Ключевые слова**: неоднозначность представления функций, аналитические функции, периодичность функций, поле сдвигов функции, отражение функций.*

Введение.

В статье рассматривается поле сдвигов $F(p)$ аналитической функции $f(p)$, полученное симметричным отражением значений данной аналитической функции относительно оси OY: $F(x+iy)=f(-x+iy)$ для всех комплексных значений $p=x+iy$ из открытой области аналитичности G исходной функции $f(p)$. Данные поля сдвигов существенно связаны с уравнением $z = f(A-(p-A)) = f(2A-p)$ отражения значений аналитической функции $z = f(p)$ относительно точки $(A,0)$ (назовем получившуюся функцию A-отражением) [1; 2]. Если поменять направление действительной оси координат, то из симметрии мы получаем, что поле сдвигов превращается в аналитическую функцию и наоборот. Если рассматривать производную получившегося поля сдвигов в обозначениях экспоненциального представления приращения функции и значений в точках, то производная поля сдвигов в произвольной точке одной полуплоскости существует и не зависит от направления комплексного приращения, так как аргумент меняет свое значение на угол пи минус аргумент для исходной системы координат. Данный факт привел к написанию данной статьи.

Приведем пример, иллюстрирующий результаты данной статьи. По определению, два уравнения $z = f(p)$ и $z = f_1(w)$ выделяют уравнения одного и того же многообразия $C_f = \{(p,z) : z = f(p)\}$ в исходной системе координат и в системе координат с центром в точке $(-A,0)$ (уравнение $z = f(p)$ рассматривалось для исходной системы координат $f_1(p) = f(p-A))$, $A>0$).

Рассмотрим запись уравнения многообразия C_f в системе координат с центром в точке (-A, 0) двумя способами. В первом случае сопоставим каждой точке с координатой w то значение z, которое получается увеличением первой координаты радиус-вектора w на A и нахождением значением z из равенства $z = f(w+A)$ (мы оставляем нависающую «шапку» значений на месте, и увеличением аргумента w находим значение, соответствующее значению z из «шапки»), $A>0$. Во втором случае мы пользуемся очевидным равенством $z = f_1(w) = f(p-A)|_{p=w}$, так как $f_1(P) = f(P-A)|$ при всех комплексных P. Мы получили два уравнения в одной системе координат, из которых следует периодичность $z = f(p)$.

Кроме предыдущего рассмотрения заметим, что из равенства $f_1(w) = f(p-A)$ при всех $p = w$ на прямой $\operatorname{Re} p = A/2$ получается, что результат сдвига направо исходного многообразия (как уравнения) со значением в точке w совпадает со значением многообразия в такой точке w: $f_1(w) = f(w - A), f_1(w) = f(p)$. Данное равенство означает четность функции $f(p)$ относительно точки (*A/2,0*), которую мы не предполагали. Так как А произвольно, то это приводит в случае аналитических функций к периодичности и совпадению поля сдвигов с самой аналитической функцией.

Кажется, что в этой ситуации равенство $f_1(w) = f(p)$ неправомочно, но как показывают результаты теорем 1, 2 и последующее рассмотрение, к аналогичному результату приводит и обыкновенное доказательство соответствующего факта без отождествления точек и концов векторов в разных системах координат.

Некоторое объяснение данного примера приведено далее.

Рассмотрим уравнение той же аналитической функции в сдвинутой налево системе координат с центром в точке $(-A,0)$ с комплексной переменной w. Данное уравнение определяет уравнение некоторой функции $z = f_0(p)$ в исходной системе координат (с переменной p). Данное уравнение можно получить двумя способами: сдвинутое налево многообразие в исходной системе координат имеет уравнение $f_0((\cdot)) = f((\cdot) + A) = z$, где на месте переменной можно сопоставить точку $p = (\cdot)$ и мы получили естественное уравнение $z = f(p + A), p = (\cdot)p$; или, не менее естественно, на месте переменной поставить вектор w, так как $z = f(w) = f_0(((\cdot))w) = f(((\cdot))w + A) = f(w + A) = f(p - A + A) = f(p)$ (здесь мы сначала считаем w точкой над «сдвинутыми налево значениями $f(p)$», затем p вектором и используем равенство $w = p + A$; в первом способе мы сначала считаем w вектором затем p точкой). Мы получили два уравнения $z = f_0(p)$. На первый взгляд данное рассуждение содержит ошибку, так как мы не предполагали исходной периодичности функции $f(p)$, но, как показывают результаты теорем 1 и 2, доказанных традиционными методами без введения новых систем координат (см. заключение к данной статье), в приведенном рассуждении нет ошибки.

В теореме 1 аналогичный факт доказывается традиционными методами исследования гармонических функций в одной системе координат без использования понятий многообразий, радиус-векторов, (см. также факты, приведенные в заключении) [1; 3].

В заключении приводится подробное доказательство теоремы 2 статьи [1] о совпадении полей сдвига с некоторыми аналитическими функциями, опирающееся на изменение направления осей координат.

1. Основной результат.

В теореме 1 доказано, что аналогичное $F(p)$ поле сдвигов в достаточно широких условиях совпадает с исходной функцией, порождающей данное поле.

Определим после сдвигов 2 в левой полуплоскости равенством $F_2(p) = f(p-A)$ при всех $x=-A$, $p = x+yi, x<0$ (данное поле сдвигов имеет также уравнение $F_2(x+iy) = f(iy)$ при всех $p = x+iy, x<0$). У данного поля сдвигов 2 значения на любой прямой $x=-B$ совпадает со значениями сдвинутой направо на величину $A-B$ функции $h(p)$, совпадающей с полем сдвигов на прямой $x=-A, -b<-A<0$, $h(p) = F_1(p), x=-A$.

При доказательстве теоремы 1 мы пользовались обыкновенными общепринятыми фактами математического анализа.

Теорема 1.

С точки зрения введения новых систем координат с центрами в точках $(-A,0)$ поле сдвигов $F_2(p)$ аналитической функции $z = f(p)$ совпадает с исходной функцией.

Доказательство.

Как и в введении два уравнения $z = f(p)$ и $z = f_1(w)$ определяют уравнения одного и того же многообразия $C_f = \{(p,z) : z = f(p)\}$ в исходной системе координат и в системе координат с центром в точке $(-A,0)$ (уравнение $y = f(p)$ рассматривалось для исходной системы координат), $f_1(p) = f(p-A)$ (уравнение $y = f(p)$ рассматривалось для исходной системы координат, $f_1(p) = f(p-A)$).

Из равенства $f_1(w) = f(p-A)$ при всех $p = w$ получаем, что $f_1(w) = f(w-A)$ на прямой $x=-A$, если считать переменные $p = w$ векторами. Если считать эти переменные точками, то предыдущее равенство звучит так: значение сдвинутой направо на величину $A>0$ функции $f(p)$ совпадает со значением $f_1(w)$ в точке w исходного многообразия C_f, (из равенства $f(p-A))|_{p=w}=f_1(w), p=w\in l=\{p=x+iy:x=-A\}$ значение $f_1(w)$ совпадает со значением исходного многообразия в точке конца вектора w, отложенного из начала второй системы координат). Оказывается, замена вектора на точку в аналитических выражениях функций является правомерной, так как значение $f_1(w)$ в точке w, например, между мнимыми осями двух систем координат равно аналитическому значению $f(w-A)$, если из точки конца вектора w во второй системе координат отложить сдвинутую налево на величину $A>0$ точку $w-A$, так как по определению $f(w-A)$ равно тому же значению $f_1(w)$ (при рассмотрении только второй системы координат). Здесь мы использовали, что значение $f(w-A)$ во второй системе координат совпадает со значением $f(p-A), p=w$ в исходной системе координат, то есть с $f_1(w)$.

Мы определили, что значения $f_1(w)$ продолжаются через точки мнимой оси второй системы координат функцией $f(w-A)$ (ее аналитическим продолжением), следовательно, функция $f_1(w)$ продолжается через исходную мнимую ось тоже аналитическим выражением $f(w-A)$ (так как аналитическое выражение $f_1(w)$ продолжается через аналитическое выражение $f(w-A)$). Мы получили еще одно аналитическое продолжение кроме продолжения функцией $f(w)$.

Теорема 1 доказана (из данной теоремы следует периодичность исходной функции $f(p)$, которую мы не предполагали).

Замечание.

Если равенство $f_1(w)=f(p-A))$ при всех $p=w$ использовать на вертикальных линиях $Re\,p=-A/2, Re\,p=-A/4$ то последовательно, применяя результат совпадения на предыдущем шаге поля сдвигов $F(p)$ с исходной функцией $f(p)$, (из равенства $f(p-2(A/2))|_{p=w}=f_1(w), p=w\in l=\{p=x+iy:x=-A/2\}$) получаем совпадение исходного поля сдвигов с исходной аналитической в G функцией $f(p)$ во всех этих точках: $F(p) = f(p), Re\,p = -A/2^n, n = 1,2$).

Некоторым объяснением возникающей периодичности является рассмотрение комплексных функций с двух точек зрения [1], сопоставляя комплексное значение z векторам или точкам плоскости как в следующем рассуждении: рассмотрим одно А-отражения $z = f(2A - p)$ и $z = f_1(4A - w)$ в этих двух системах координат с центрами в точках $(0,0)$ и $(-A,0)$ относительно точки с координатой $(A,0)$ в исходной системе координат.

Равенства сохраняются, если рассматривать переменные p и w как одинаковые точки на прямой $x = A$ (прямая определена в исходной системе координат). После перехода к функции $f(p)$ во второй системе координат получаем, что для всех таких точек $z = f(3A - w)$ (очевидно, $f(w) = f_1(w + A)$, мы определили, что уравнение $z = f(3A - w)$ верно для радиус векторов w, следовательно, верно и для точек $(\cdot)p = (\cdot)w$ в смысле сопоставления точкам комплексной плоскости комплексного значения z). Здесь значение $3A - w$ совпадает с вектором $3A - w$, у которого точки $3A, w$ совпадают с началом и концом данного вектора.

С точки зрения многообразий (сопоставления точкам комплексной плоскости комплексного значения z по формулам аналитических выражений от w) мы получили два уравнения $z = f(3A - p), (\cdot)p = (\cdot)w,$ и уравнение $z = f(2A - p)$ одного многообразия значений А-отражения в исходной системе.

2. Заключение.

Ввиду некоторой нетрадиционности результатов данной статьи мы рассмотрим еще один относительно простой вариант доказательства аналогичного результата: совпадения полей сдвигов с аналитическими функциями можно было доказать без использования понятий многообразий или гармонических функций или производных с помощью приведенного далее факта [1]. Результатом отражения значений функции $y = f(-p)$ на вертикальных линиях $x = A$ относительно точки $(A,0)$ при всех действительных А является полем сдвигов $F(p)$ функции $f(p)$, причем с точки числовых значений при изменении направления оси OY на противоположное те же самые комплексные числовые значения, сопоставленные точкам плоскости как для исходной функции $z = f(p)$, совпадают со значениями поля сдвигов функции $z = f(-p)$, определенной уже для новой системы координат.

В теореме 1 работы [1] с помощью только что приведенного изменения направления осей координат доказано, что поле сдвигов можно считать обыкновенной аналитической функцией в правой полуплоскости [5; 6; 7]. Далее, в теореме 2 приведено краткое доказательство данной теоремы из работы [1].

Теорема 2.

Если функция $z = f(p)$ аналитична в правой полуплоскости, то с точки зрения переименования систем координат $X = y, Y = x$ поле сдвигов $z = f(i(x - iy), X = y, Y = x$ совпадает с некоторой аналитической функцией $g(p) = f(i(x - iy), p = x + iy$ (аналитичной относительно комплексной переменной $p = x + iy$).

Доказательство.

Если оси координат поменять местами, то уравнение аналитической в правой полуплоскости в исходных координатах функции $f(p)$ равно $Z = f(X + iY), X = y, Y = x$. Исходное отображение точек плоскости $p \to f(p) = z$ в новых координатах является полем, так как новые координаты можно получить сначала поворотом на $\pi/2$, а затем изменением направления новой оси OY на противоположное. (Очевидно, поле сдвигов переходит в аналитическую функцию и наоборот при изменении направления одной из осей координат).

Следовательно, $Z = f(i(Y - Xi))$ тоже является полем; данный факт означает, что $Z = f(i(x - yi)) = g(p)$ является аналитической функцией, так как при переименовании осей аналитическая функция превращается в поле, а поле сдвигов превращается в аналитическую функцию при одной и той же области определения обеих выражений (переименование осей координат и замена x на y и y на x в обеих случаях приводит к совпадению с функцией $u(y, x) + iv(y, x)$, если исходная функция равна $f(p) = u(x, y) + iv(x, y)$ [13]. Данный факт противоречит тому, что сопоставление $z = f(i(x - yi))$ должно являться полем сдвигов одновременно с полем сдвигов (вдоль оси OY) $z = f(x - yi)$.

Мы доказали, что $z = f(i(x - yi))$ одновременно является и аналитической функцией, и полем сдвигов вдоль оси OY во всей правой полуплоскости.

Заметим, что формально из результатов данной работы следуют все результаты статей [5; 6].

Список литературы

1. Павлов А.В. Отраженные функции и периодичность / А.В. Павлов // Фак. ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова. International Journal of Open Information Technologies. – 2022. –№6. – С. 33–39.

2. Чубариков В.Н. Об асимптотических формулах для интеграла И.М. Виноградова / В.Н. Чубариков // Тр. Матем. Инс-та АН СССР. – 1981. – №157. – С. 214–232.

3. Павлов А.В. Отражение регулярных функций / А.В. Павлов // Мат. физика и компьютерное моделирование. – Волгоград. гос. университет, 2021.– №4. – С. 79–82.

4. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1987.

5. Павлов А.В. Преобразование Фурье и формула обращения преобразования Лапласа / А.В. Павлов // Мат. заметки. – 2011. – № 6. – С. 33–39.

6. Pavlov A.V. About the equality of the transform of Laplace to the transform of Fourier / A.V. Pavlov // Issues of Analysis. – 2016. – Vol. 5 (23). №4 (76). – P. 21–30.