Павлов Андрей Валерианович
канд. физ.-мат. наук, доцент
ФГБОУ ВПО «Московский государственный
технический университет радиотехники,
электроники и автоматики»
г. Москва

DOI 10.21661/r-559010

НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ II. ОТОЖДЕСТВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ СДВИГА

***Аннотация**: статья продолжает результаты автора на данную тему. Определяется поле сдвигов по формуле F(x + iy) = f(-x + iy) для произвольной аналитической в произвольной открытой области функции f(p). Автором рассматриваются две системы координат с центрами на действительной оси. Доказано, что в относительно общих условиях поле сдвигов совпадает с самой аналитической функцией, если рассматривать значения поля сдвигов при совпадении векторов переменных в разных системах координат. Аналогичный результат получается как следствие введения новой системы координат и рассмотрения уравнений одного многообразия в этих системах с разных точек зрения. Периодичность аналитических функций выводится также из сдвигов массивов полей сдвигов в одной полуплоскости.*

***Ключевые слова**: неоднозначность представления функций, аналитические функции, периодичность функций, поле сдвигов функции, отражение функций.*

Введение.

Статья является продолжением статьи автора с аналогичным названием. Приведем пример, иллюстрирующий результаты данной статьи. Аналогично предыдущим статьям на данную тему два уравнения $z = f(p)$ и $z = f_1(w)$ определяют уравнения одного и того же многообразия $C_f = \{(p,z): z = f(p)\}$ в исходной системе координат и в системе координат с центром в точке $(-A,0)$, (уравнение $z = f(p)$ рассматривалось для исходной системы координат, $f_1(p) = f(p-A))$, A>0.

Заметим, что равенство $f_1(w) = g(p-A), p = w,$ в приведенных системах координат возможно только при совпадении аналитических выражений функций $f = g$. Следовательно, равенство $f_1(w) = f_1((w-A)+A) = f_1((p-A)+A) = g(p-A), p = w,$ возможно только при сдвинутой сначала влево на величину А функции $f_1(w)$, так как $z = f_1((\bullet)+A)$), перемещенной в начальную систему координат с заменой $p = w$ сдвигом направо на ту же величину А аналитического выражения, так как уравнение f_1 совпадает с уравнением сдвинутой направо уравнения f, и $f_1 = g$ как аналитическое выражение, то есть аналитические выражения функций f и f_1 должны совпадать, что возможно только при периодичности f (приведенный факт является другим доказательством основной части теоремы 1).

Правомочность равенства $f_1(w) = f(p)$ проверяется также в теореме 2 данной статьи. При этом определяется поле сдвигов $F(p)$ аналитической функции $f(p)$, полученное симметричным отражением значений данной аналитической функции относительно оси OY: $F(x+iy) = f(-x+iy)$ для всех комплексных значений $p = x+iy$ из открытой области аналитичности G исходной функции $f(p)$, [1; 2]. Основной результат получается после сдвига массива значений поля сдвигов вместе с центром координат в точку (-3А,0) [1; 3].

Применение результатов статьи к задачам механики и математической физики очевидно вытекает из совпадения сдвинутых полей с некоторыми аналитическими выражениями [2; 4; 5; 6].

Поля сдвигов и периодичность.

В теореме 1 приводится по мнению автора естественное доказательство периодичности относительно произвольной аналитической функции с точки зрения двух разных систем координат.

Теорема 1.

С точки зрения введения новой системы координат с центром в точке $(-A,0)$ поле сдвигов $F(p)$ аналитической функции $z = f(p)$ совпадает с исходной функцией $A > 0$.

Доказательство.

Если рассмотреть значения функции $f(p)$ на прямой $X = -B$ перемещенные в вертикальные линии полей сдвигов относительно двух центров введенных ранее систем координат, то одни и те же значения повторяются на вертикальных линиях правой полуплоскости, расстояние между которыми равно 2А. Результат перемещения значений исходной функции с линии $X = -B$ (в исходной системе координат) на мнимую ось исходной системы координат совпадает как с полем сдвигов для второй системы координат так и с полем сдвигов на этой же вертикальной линии для исходной системы координат при $B - A = A, -B < -A < 0$. Следовательно поля сдвигов в правой полуплоскости далее совпадают с перемещениями значений этих двух функций, причем значения на всех вертикальных линиях совпадают со значениями двух функций, сдвинутых одна относительно другой на величину $2(B - A) = 2A$.

Следовательно, если сдвинуть второе поле сдвигов на величину 2А налево вместе с началом координат, перемещенным в точку (-3А,0) относительно исходной системы координат, то поля сдвигов в исходной правой полуплоскости совпадут. Мы получили, что совпадают поля сдвигов относительно двух центров координат, находящихся на расстоянии 3А друг от друга, для функций, сдвинутых одна относительно другой на величину 2А. Поля сдвигов могут совпадать только у функций, сдвинутых одна относительно другой на величину, равную удвоенному расстоянию между центрами координат, то есть на величину 6А. Данный факт очевидно приводит к периодичности исходной функции, которую мы не предполагали.

Так как число А>0 произвольно, то теорема 1 доказана.

Ввиду важности с точки зрения автора результатов теоремы 1 для приложений в теореме 2 рассматривается другое доказательство основного факта о периодичности функции f(p).

Теорема 2.

Аналитическая функция $f(p)$ становится периодичной с периодом A, если в симметричной относительно мнимой оси открытой области G рассмотреть новые системы координат при $[-4A,4A] \in G, A>0$.

Доказательство.

Как и в введении два уравнения $z = f(p)$ и $z = f_1(w)$ определяют уравнения одного и того же многообразия $C_f = \{(p,z) : z = f(p)\}$ в исходной системе координат и в системе координат с центром в точке $(-A,0)$, (уравнение $y = f(p)$ рассматривалось для исходной системы координат), $f_1(p) = f(p-A)$ (уравнение $y = f(p)$ рассматривалось для исходной системы координат, $f_1(p) = f(p-A))$. Из равенства $f_1(w) = f(p-A)$ при всех $p = w$ получаем, что $f_1(w) = f(w-A)$.

Далее, повторяя рассуждение, приваленное во введении, подучаем: равенство $f_1(w) = g(p-A), p = w,$ в приведенных системах координат возможно только при совпадении аналитических выражений функций $f = g$. Следовательно, равенство $f_1(w) = f_1((w-A)+A) = f_1((p-A)+A) = g(p-A), p = w,$ возможно только при сдвинутой сначала влево на величину A функции $f_1(w)$, (так как $z = f_1((\bullet)+A)$), перемещенной в начальную систему координат с заменой $p = w$ сдвигом направо на ту же величину A аналитического выражения, (так как уравнение f_1 совпадает с уравнением сдвинутой направо уравнения f, и $f_1 = g$ как аналитическое выражение), то есть аналитические выражения функций f и f_1 должны совпадать, что возможно только при периодичности f.

Теорема 2 доказана.

Отмети, что можно было как первой работе автора с тем де называнием просто продолжить значения функции $f_1(w)$ через точки мнимой оси второй системы координат функцией $f(w-A)$, (ее аналитическим продолжением, [4,5}), следовательно, функция $f_1(w)$ продолжается через исходную мнимую ось тоже аналитическим выражением $f(w-A)$, (так как аналитическое выражение $f_1(w)$ продолжается через аналитическое выражение $f(w-A)$). Мы получили еще одно аналитическое продолжение кроме продолжения функцией $f(w)$.

Из данных теорем 1, 2 следует периодичность исходной функции $f(p)$, которую мы не предполагали полуплоскости.

Заметим, что формально из результатов данной работы следуют все результаты статей [5; 6].

Заключение.

Результаты данной статьи в отличие от предыдущих работ автора доказаны относительно в простой форме и не используют теоретически сложных понятий сдвигов комплексных многообразий. Применимость данных результатов к физическим задачам математической физики требует дальнейшего рассмотрения с точки зрения состыковки полей сдвигом с традиционными методами исследования электромагнитных полей и задач механики.

Список литературы

1. Павлов А.В. Отраженные функции и периодичность / А.В. Павлов // Фак. ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова. International Journal of Open Infor-mation Technologies. – 2022. –№6. – С. 33–39.

2. Чубариков В.Н. Об асимптотических формулах для интеграла И.М. Виноградова / В.Н. Чубариков // Тр. Матем. Инс-та АН СССР. – 1981. – №157. – С. 214–232.

3. Павлов А.В. Отражение регулярных функций / А.В. Павлов // Мат. физика и компьютерное моделирование. – 2021.– №4. – С. 79–82.

4. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1987.

5. Павлов А.В. Преобразование Фурье и формула обращения преобразования Лапласа / А.В. Павлов // Мат. заметки. – 2011. – № 6. – С. 33–39.

6. Pavlov A.V. About the equality of the transform of Laplace to the trans-form of Fourier / A.V. Pavlov // Issues of Analysis. – 2016. – Vol. 5 (23). №4 (76). – P. 21–30.