УДК 514

DOI 10.21661/r-559645

В.Д. Чемерис, М.А. Чемерис, В.В. Чемерис

ПЕРЕНОС ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР МЕЖДУ ПРОСТРАНСТВАМИ И ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ОБЩЕЙ ГЕОМЕТРИИ

***Аннотация**: статья посвящена исследованию возможности переноса линий и элементарных геометрических фигур между пространствами, которое привело авторов к совершенно новому представлению об общей геометрии (метагеометрии). В результате, геометрическая теория Евклида и неевклидовы геометрии гармонично слились в единую систему. Попутно была решена проблема определения кривизны пространства. Авторы предлагают очевидное и простое соотношение в качестве критерия оценки кривизны.*

***Ключевые слова**: евклидова геометрия, неевклидова геометрия, геометрия Лобачевского-Бойяи, геометрия Римана, метагеометрия, кривизна пространства.*

1. *Перенос прямых*

В любом месте пространства, даже имеющего кривизну и дефектность, можно помещать плоскости, и через любую точку этого пространства в любом направлении можно провести прямую линию. В этом можно убедиться на простом примере.

Возьмём лист бумаги. Разрежем его. Сдвинем одну часть листа относительно другой и склеим обе части между собой (рис. 1). На, полученном из листа, образовании нам ничто не мешает провести прямую линию.

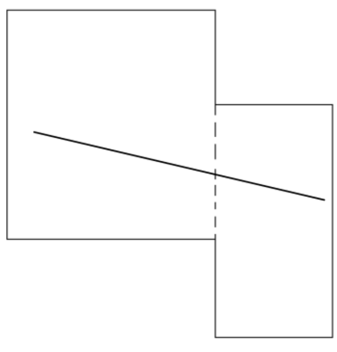

Рис. 1. Прямая линия на листе после смещения его частей

Аналогичные действия можно произвести с геометрической плоскостью, а также легко представить себе ситуацию, когда в пространстве делается сечение и выполняется смещение частей пространства. Но после этой порчи плоскости или пространства не составляет труда провести через любую точку прямую линию в любом направлении, а в пространстве в любом месте построить плоскость.

Там, где есть плоскости и прямые линии, применима *геометрия Евклида*.

Приведённый пример крайне прост, и он ничего не доказывает, но зато иллюстрирует наше первое *Утверждение*: *в пространствах, даже имеющих сжатия, растяжения, изгибы и любые другие дефекты, применима геометрия Евклида*.

Следующее наше *Утверждение* тоже достаточно очевидное: *между пространствами использование евклидовой геометрии не представляется возможным*.

Подсознательно мы всегда полагали, что, если взять кусок из одного *евклидова пространства* и перенести его в другое, тоже *евклидово*, то этот кусок без каких-либо проблем впишется в новое пространство и совершенно гармонично займёт предназначенное ему место.

В действительности всё совершенно не так.

Два пространства по отдельности могут быть пригодными для применения в них *евклидовой геометрии*, но при этом иметь отклонения по отношению друг к другу. И при включении одного пространства в другое происходит деформация. Прямые линии, плоскости, фигуры и тела, переносимые из одного пространства в другое, приобретают некоторую кривизну.

Разберём пример с эластичной пластиной.

Предположим, что нам дана прямоугольная эластичная пластина S. Пластину S деформируем. Два противолежащих края закрепляем, а центральную часть сдвигаем параллельно этим краям (Рис.2a). Получившееся состояние пластины S обозначим индексом a.

Следует отметить, что на пластине в состоянии S_a вполне применима *геометрия Евклида*, поэтому не представляет никакого труда провести прямую a, перпендикулярную недеформированным краям.

Далее, пластину S продолжим деформировать.

Два противолежащих, недеформированных прежде, края, по-прежнему, удерживаем, а центр снова двигаем параллельно этим краям (Рис. 2*б*). Новое состояние пластины S обозначим индексом b. Прямая a перестала быть прямой линией и приобрела форму дуги a' (k_{ab}), где k_{ab} – коэффициент кривизны пластины в состоянии S_{b} относительно состояния S_a.

В состоянии S_{b} пластина S так и осталась пластиной, то есть к ней вполне применима *геометрия Евклида*, поэтому на пластине S_{b}, как и прежде, можно рисовать прямые линии, и мы проведём такую линию (b), перпендикулярно недеформированным краям.

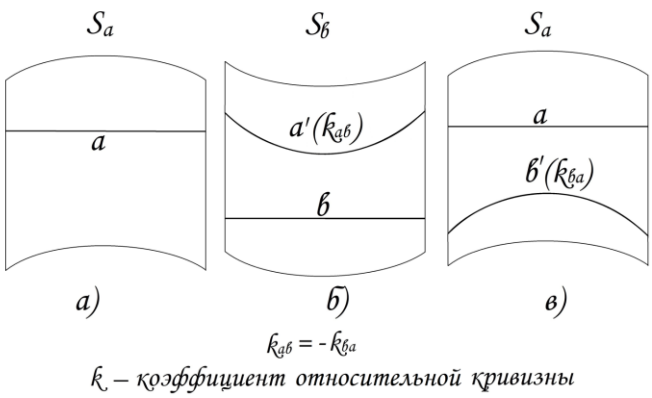

Рис. 2. Прямые линии на деформируемой пластине: а) первая деформация, б) вторая деформация, в) возврат к состоянию первой деформации

В состоянии S_{b} линия b является прямой, а линия a – дугой a' (k_{ab}).

Следующим шагом будет возвращение пластины S в состояние S_a (Рис. 2*в*). После этого линия a снова стала прямой, но теперь линия b превратилась в дугу b' (k_{ba}), где k_{ba} – коэффициент кривизны пластины в состоянии S_a относительно состояния S_{b}. Выгиб дуги b' (k_{ba}) имеет противоположное по отношению к выгибу дуги a' (k_{ab}) направление. То есть по модулю коэффициенты относительной кривизны k_{ab} и k_{ba} равны, но знаки имеют разные: $k_{ab} = -k_{ba}$.

Перенесём, полученный на плоскости, результат в пространство.

Предположим, что нам даны трёхмерные пространства W_{c} и W_{d}. В пространстве W_{c} вполне применима *геометрия Евклида*, и в пространстве W_{d} она не вызывает нареканий. Но при этом, пространство W_c имеет во всех своих точках некоторую постоянную величину кривизны k_{dc} относительно пространства W_d. Соответственно, пространство W_d тоже имеет постоянную кривизну k_{cd} относительно пространства W_c.

Получается, что, если в пространстве W_c провести прямую *c*, а затем перенести её в пространство W_d, то она отобразится непрямой линией *c'* (k_{cd}) (Рис. 3). И наоборот, если в пространстве W_d провести прямую *d* и перенести её в пространство W_c, то уже теперь она отобразится непрямой линией *d'* (k_{dc}).

Рис. 3. *Перенос прямых линий в пространствах, имеющих между собой относительную кривизну*

То, что было прямым и ровным в одном пространстве, становится изогнутым и кривым в другом, и наоборот. Плоские и прямолинейные отрезки, углы и многоугольники при переносе из одного пространства в другое становятся неплоскими и непрямолинейными. В таком случае, к перенесённым геометрическим фигурам невозможно применять геометрические *Постулаты* и *Теоремы Евклида*, так как они предназначены только для плоских и прямолинейных фигур.

Мы проиллюстрировали наше *Утверждение* о том, что, если между пространствами имеется некоторая кривизна, то будет невозможно пользоваться *евклидовой геометрией* в отношениях между этими пространствами. Нужны другие инструменты – *неевклидовы*. Но какие *неевклидовы геометрии*, когда и как использовать? Чтобы ответить на эти вопросы, следует рассмотреть примеры с более сложными геометрическими объектами.

2. *Перенос окружностей.*

Окружность – замкнутая плоская линия постоянной кривизны. У окружности есть центр кривизны. Это точка, расстояние от которой до любой точки окружности является постоянной величиной. Отрезок между точками окружности через центр – диаметр. Отрезок от центра до окружности – радиус. Величина обратная радиусу – кривизна. Центр кривизны, радиусы и диаметры находятся с окружностью в одной плоскости.

Итак, атрибутами окружности являются: кривизна, замкнутость, длина, радиус, диаметр, центр, плоскость. Осуществим перенос окружностей между пространствами, и определим: какие из атрибутов сохранятся, какие преобразуются, а какие исчезнут.

Предположим, имеются пространства W_c и W_f, в которых применима *евклидова геометрия*, и между ними существует некая относительная кривизна. Точнее, пространство W_c является более кривым по отношению к пространству W_f. Значит, коэффициент кривизны k_{fc} пространства W_c относительно пространства W_f положительный ($k_{fc}>0$).

Проведём в пространстве W_f по плоскости X_f окружность L_f (F, r_f) радиусом r_f и с центром в точке F (Рис. 4). Дадим обозначения другим атрибутам: d_f – диаметр, k_f – кривизна.

Наши построения при переносе прямых линий между пространствами были произвольными. В настоящее время не существует реальных примеров такого переноса. Отсутствуют и методики для этого. И вообще, никто не может сказать, возможен ли перенос линий, геометрических фигур и тел между пространствами, имеющими относительную кривизну, и поэтому можно делать только предположения о том, как должны выглядеть объекты из других пространств, и вариантов таких предположений может быть множество.

Вариант A_f. Предположим, что после переноса в пространство W_c плоскость X_f так и осталась плоскостью (X_A), окружность L_f – окружностью (L_A), лежащей в этой плоскости. Но окружность L_A по своим характеристикам отличается от оригинала. Так радиус r_A, диаметр d_A и кривизна k_A окружности L_A не равны радиусу r_f, диаметру d_f и кривизне k_f окружности L_f. Кривизна k_A меньше, чем кривизна k_f, а радиус r_A и диаметр d_A, наоборот, больше, чем r_f и d_f.

Плюсами переноса окружности L_f в окружность L_A является то, что сохраняется представление о том, что L_f является окружностью:

– постоянное значение кривизны;

– замкнутость;

– длина соответствует изначальному значению;

– есть радиусы, диаметры и центр;

– перенесённая линия располагается в плоскости.

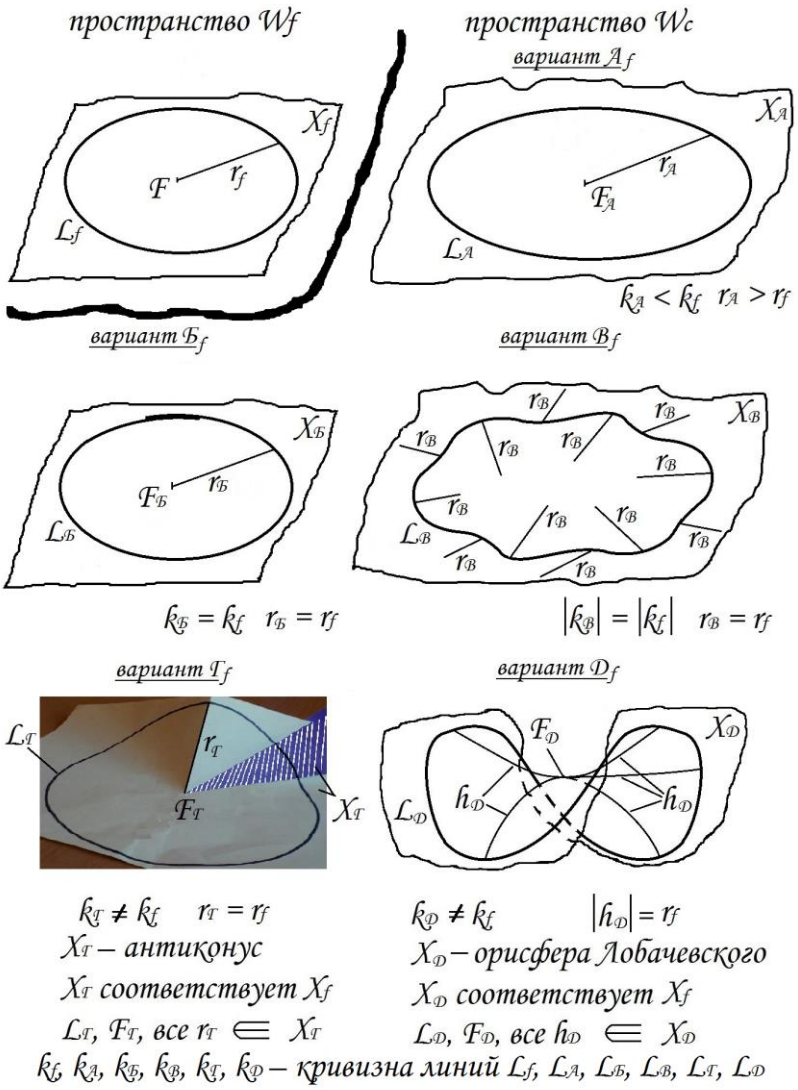

Рис. 4. Варианты отображения окружности после переноса в более кривое пространство

Но есть и серьёзные минусы:

– величина кривизны после переноса не соответствует кривизне окружности до переноса;

– размеры радиуса и диаметра не соответствуют размерам радиуса и диаметра изначальной окружности.

Вариант $Б_f$. Перенесённая плоскость X_f остаётся плоскостью ($X_Б$). На плоскости $X_Б$ линия $L_Б$, отображающая окружность L_f, имеет кривизну $k_Б$, равную k_f. Радиус $r_Б$ и диаметр $d_Б$ также равны изначальным r_f и d_f. Линия $L_Б$ имеет центр ($F_Б$). Но $L_Б$ расположена по окружности, на которой ей не хватает места, и часть линии $L_Б$ захлёстывается. При этом приходится отказываться от такого важного атрибута окружности как замкнутость. Чтобы из пространства W_f перенести в пространство W_c, окружность L_f приходится разрезать, и один полученный конец накидывать на другой.

Плюсами превращения окружности L_f в линию $L_Б$ после переноса является:

– постоянное значение кривизны, соответствующее исходному;

– величина длины лини соответствует длине исходной окружности;

– есть радиусы, диаметры и центр;

– размеры радиуса и диаметра соответствуют размерам радиуса и диаметра окружности до переноса;

– после переноса окружность по-прежнему располагается в плоскости.

Есть и минусы:

– полученная линия незамкнута и частично перекрывает сама себя.

Вариант $В_f$. Плоскость X_f после переноса в пространство W_c остаётся плоскостью ($X_В$). Можно разложить окружность L_f в плоскости $X_В$ как замкнутую линию $L_В$ с кривизной $k_В$, соответствующей действительной кривизне k_f, но только по модулю. Кривизна $k_В$ может менять знак. Будет утерян центр кривизны. Точнее, он рассредоточится и для каждого участка будет своим. Полученная линия $L_В$ будет замкнутой линией постоянной кривизны, но не будет окружностью. В любом месте к линии $L_В$ можно провести радиус кривизны $r_В$, и он будет равен r_f. В таком отображении окружности L_f мы видим плоскую замкнутую линию постоянной кривизны, но совсем не видим окружности.

Плюсами отображения окружности L_f после переноса в линию L_B является то, что сохраняется представление, что L_f является плоской замкнутой линией постоянной кривизны:

– постоянное значение кривизны по модулю, равное изначальному;

– замкнутость;

– величина длины исходной окружности сохранена;

– линия, в которую превратилась окружность, находится в плоскости;

– есть радиусы, и размеры радиусов соответствуют размерам радиусов изначальной окружности.

Но есть минусы:

– по мере движения по линии, в которую превратилась окружность, кривизна меняет знак, выгнутость линии сменяется вогнутостью;

– нет диаметров и центра.

Вариант Γ_f. По этому варианту мы предполагаем, что после переноса в пространство W_c окружность L_f не укладывается в плоскость. Поверхность X_Γ, на которой располагается окружность L_f после переноса, скорее напоминает шатёр бродячего цирка. Получить такую поверхность достаточно просто. Нужно на листе бумаги сделать прямолинейный разрез, не доходящий до края листа. Далее следует взять любой кусок другого листа, вырезанного в форме какого-либо прямолинейного угла, и вклеить его в полученный разрез так, чтобы вершина угла совпала с точкой окончания разреза, а стороны угла со сторонами разреза. Получилась своеобразная коническая поверхность, правильнее будет такую поверхность называть *антиконусной*. Вершиной антиконусной поверхности является вершина вставленного угла и одновременно точка окончания разреза. Вершина F_Γ антиконуса X_Γ соответствует отображению центра F. Линия L_Γ, проходящая по антиконусной поверхности X_Γ от F_Γ на расстоянии r_Γ, равном r_f, является отображением окружности L_f. Любой отрезок r_Γ от точки F_Γ до линии L_Γ соответствует отображению радиуса r_f. Диаметр d_f, в таком случае, отображается ломаной линией $d_Г$, состоящей из двух отрезков $r_Г$. В точке $F_Г$ происходит перегиб линии $d_Г$.

Плюсами преображения окружности L_f после переноса в линию $L_Г$ является то, что сохраняется представление о том, что L_f является замкнутой линией, все точки которой расположены от некой одной точки на равном расстоянии:

– замкнутость;

– величина длины окружности сохранена;

– есть радиусы, линии, отображающие диаметры, и центр;

– длины радиусов соответствуют изначальным;

– вполне определена поверхность, на которой располагаются отображения окружности, радиусов, диаметров и центра.

Но и у этого варианта есть минусы:

– величина кривизны линии, отображающей окружность, не соответствует кривизне изначальной окружности;

– линия, отображающая диаметр, не является прямой;

– поверхность, по которой распределено отображение окружности, не является плоскостью.

Вариант D_f. По этому варианту перенесённую окружность L_f помещаем не на плоскость, а на *орисферу Лобачевского* (X_D). Поверхность X_D является поверхностью постоянной кривизны, чем-то похожа на седловину, а чем-то на горловину песочных часов. Линия L_D, отображающая окружность L_f – неплоская линия. Радиусы r_f отображаются непрямыми линиями (h_D). Все линии h_D выходят из одной точки F_D. Эта точка соответствует отображению точки F в пространстве W_c. Сама по себе линия L_D – линия постоянной кривизны. Хотя, кривизна линии k_D не равна кривизне k_f.

Плюсами отображения окружности L_f в линию L_D является то, что сохраняется представление о линии L_f как о замкнутой линии постоянной кривизны, лежащей на поверхности:

– постоянное значение кривизны;

– замкнутость;

– величина длины, отображающей окружность, линии соответствует длине исходной окружности;

– есть линии, соответствующие исходным радиусам и диаметрам;

– длины линий, отображающих диаметры и радиусы, равны исходным длинам;

– есть точка, соответствующая исходному центру окружности.

Но имеются и минусы:

– величина кривизны не соответствует кривизне изначальной окружности;

– линии, отображающие радиусы и диаметры, не являются отрезками;

– поверхность, на которую отображаются окружность, диаметры, радиусы и центр, не является плоскостью.

Каждый из пяти вариантов по-своему интересен и даёт, хотя, однобокое, но своё, представление, дополняющее другие, об окружности L_f, перенесённой из пространства W_f в пространство W_c. И всё же. Если придерживаться мнения, что любое пространство можно разложить на точки, то есть точка – это базовый элемент геометрии, то можно, для начала определиться с требованиями к переносу точек между пространствами, а затем на основании этих требований можно подойти к оценке вариантов переноса более критически и отсеять некоторые из них. Предлагаем идти этим путём.

Сформулируем *Требования к переносу точек* между пространствами.

1. Любой точке одного пространства есть место в другом, причём, это место единственное, а также, две точки, и более, после переноса не могут занимать одно и то же место.

2. Возле точки после переноса ничто не меняется. В пренебрежимо малом объёме пространства, ничто не отличается от окрестностей, которые окружали точку до переноса.

Этими правилами воспользуемся в оценке вариантов переноса окружности.

Вариант A_f во многом напоминает обычное масштабирование. На первый взгляд в нём нарушение *Требований к переносу точек* не обнаруживается.

В варианте $Б_f$ нарушено *Первое требование к переносу точек*, так как отсутствует замкнутость. Концы образовавшейся линии накладываются один на другой. Но две перенесённые точки не могут занимать одно и то же место, то есть, налагаться друг на друга. Кроме того, две, соприкасающиеся до переноса, точки (точки разрыва) после переноса оказываются разделёнными. Это однозначно указывает, что было нарушено *Второе требование к переносу точек*, и вариант $Б_f$ для переноса между пространствами не пригоден.

В варианте $В_f$ утерян единый центр кривизны. Получается, что одна и та же точка (центр кривизны) после переноса стала располагаться не в одном месте, а сразу в нескольких. Нарушено *Первое требование к переносу точек*. Вариант тоже не пригоден.

В варианте $Г_f$ диаметр превратился в ломаную линию. Здесь нарушено *Второе требование к переносу точек*. Возле точки, соответствующей перенесённому центру кривизны, образовался перегиб, а такого быть не может, так как до переноса все диаметры проходили через центр без перегибов.

В варианте D_f отклонений от *Требования к переносу точек* не просматривается. В итоге, оставляем, пока что, два варианта A_f и D_f: вариант «масштабирования» и вариант размещения переносимой линии на *орисфере Лобачевского*.

Мы проводим операцию переноса геометрических объектов между пространствами, но до сих пор не дали определения термину *перенос*. Это нужно исправить. Под *геометрическим переносом* совершенно не обязательно подразумевать физический перенос. То есть, такой перенос, при котором что-то, находящееся в одном месте, из этого места исчезло и появились в другом. В геометрии этого делать не обязательно. В ней важно лишь понимание, как должен выглядеть некий объект, имеющий форму, если бы его перенесли из одного пространства в другое. Именно поэтому, мы часто вместо слова «перенос» используем слова «отображение» или «проецирование», слово «перенесённый» заменяем словами «отображённый» и «спроецированный». Ведь, *геометрический перенос* – это один из видов отображения. Кстати, методы и правила *проективной геометрии* являются ещё одним инструментом переноса. Мы в данной статье даже не планируем это обсуждать, так как полагаем, что такая точка зрения вполне очевидна.

Важно отметить, что *геометрический перенос* имеет свойства.

Во-первых, он обратим. Перенесённый геометрический предмет меняет свою форму, попадая в другое пространство. Если же его вернуть обратно, то геометрическая форма предмета восстановится. Например, геометрическая фигура T была перенесена из пространства W_t в пространство W_q и изменила свою форму, превратившись в фигуру T' (T=>T'). Возвративши фигуру обратно в пространство W_t, убеждаемся, что она вернула себе прежнюю форму (T'=>T): T <=> T'.

Во-вторых, переносимый геометрический предмет меняет свою форму, но, если до переноса его форма было единственной и однозначно определённой, то и после переноса форма, хотя и изменилась, но для того пространства, в котором предмет оказался, по-прежнему будет одной, единственной возможной. Конечно, следует сделать оговорку, речь идёт о *пространствах с постоянными коэффициентами кривизны*.

Из сказанного следует, что из всех возможных вариантов переноса окружности из менее кривого пространства в более кривое должен остаться только один – или «масштабирование» или отображение на *орисферу Лобачевского*. Решения этой проблемы у нас пока нет, поэтому не забываем о ней и держим пока в уме.

Свойства геометрического переноса и *Требования к переносу точек* применим к другому случаю переноса окружности – из кривого пространства в более ровное.

Предположим, кроме пространств W_c и W_f имеется ещё пространство W_g, в котором, применима *евклидова геометрия,* и между пространствами существует некая относительная кривизна. Пространство W_c не такое кривое, как пространство W_g, и поэтому коэффициент кривизны k_{gc} пространства W_c относительно пространства W_g отрицательный (k_{gc}<0).

Проведём в пространстве W_g по плоскости X_g окружность L_g (G, r_g) с радиусом r_g и центром в точке G (Рис. 5). Другие атрибуты окружности L_g: d_g – диаметр, k_g – кривизна. Перенесём окружность L_g из пространства W_g в пространство W_c. Как должна выглядеть окружность L_g после переноса в пространство W_c, готовых ответов не существует, но можно предположить несколько вариантов.

Вариант A_g. Предположим, что после переноса в пространство W_c плоскость X_g так и осталась плоскостью (X_A), окружность L_g – окружностью (L_A), лежащей в этой плоскости. Но окружность L_A по своим характеристикам отличается от оригинала. Так радиус r_A, диаметр d_A и кривизна k_A окружности L_A не равны радиусу r_g, диаметру d_g и кривизне k_g окружности L_g. Кривизна k_A больше, чем кривизна k_g, а радиус r_A и диаметр d_A, наоборот, меньше, чем r_g и d_g.

Плюсами отображения окружности L_g в окружность L_A является то, что сохраняется представление о том, что L_g является окружностью:

– постоянное значение кривизны;

– замкнутость;

– длина соответствует изначальному значению;

– есть радиусы, диаметры и центр;

– перенесённая линия располагается в плоскости.

Минусы тоже имеются:

– величина кривизны не соответствует кривизне изначальной окружности;

– размеры радиуса и диаметра не соответствуют размерам радиуса и диаметра изначальной окружности.

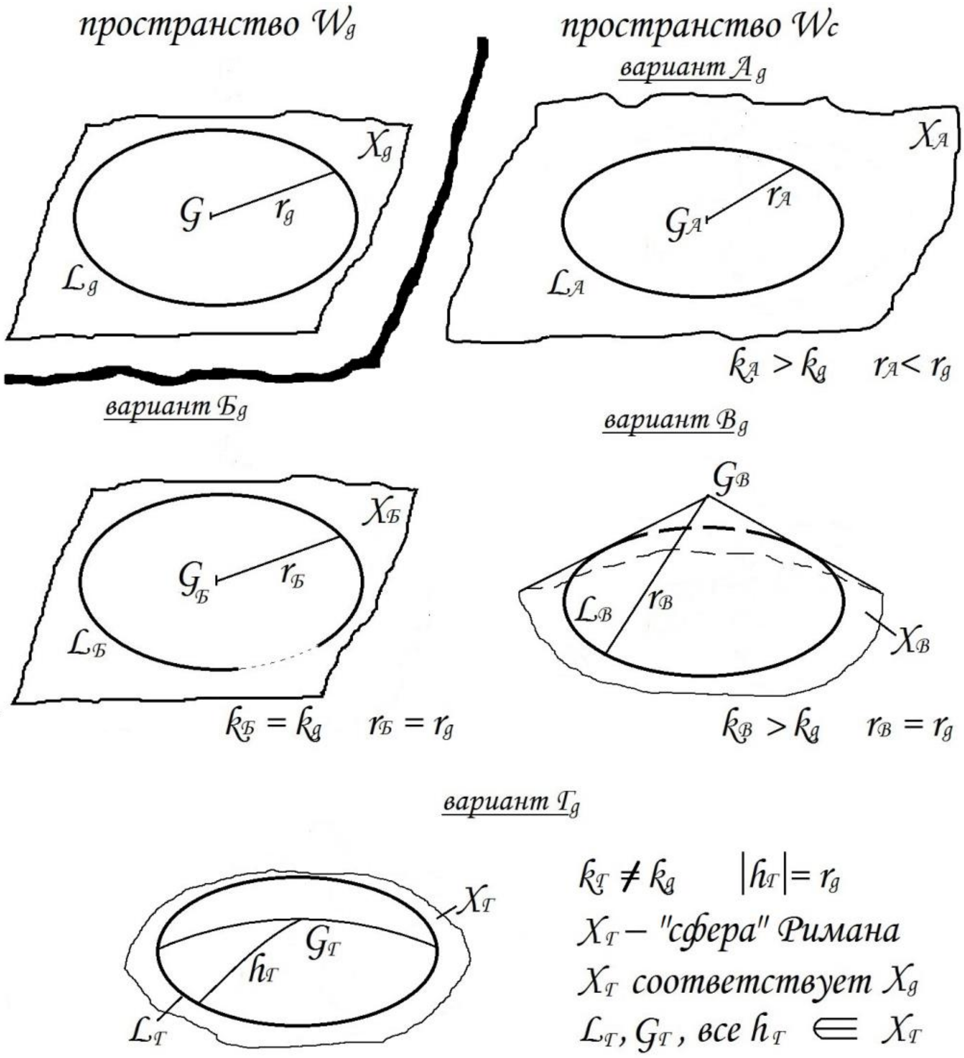

Рис. 5. Варианты отображения окружности после переноса
в менее кривое пространство

Вариант $А_g$ аналогичен варианту $А_f$. Он также похож на метод масштабирования, и нарушения *Требований к переносу точек* этим способом, на первый взгляд, не обнаруживается.

Вариант $Б_g$. Окружность L_g после переноса в пространство W_c можно представить как линию постоянной кривизны ($L_Б$), лежащую на плоскости ($X_Б$). То есть плоскость $X_Б$ является отображением плоскости X_g. На плоскости $X_Б$ линия $L_Б$, отображающая окружность L_g, имеет кривизну $k_Б$, равную k_g. Радиус $r_Б$ и диаметр $d_Б$ также равны изначальным r_g и d_g. Линия $L_Б$ имеет центр ($G_Б$). Но $L_Б$ расположена по окружности, которая для неё велика, и у линии $L_Б$ имеется просвет. По варианту $Б_g$ приходится отказаться от такого важного атрибута окружности как замкнутость. Чтобы перенести в пространство W_c окружность L_g, её приходится разрезать, и один полученный конец не сходится с другим.

Плюсами отображения окружности L_f в линию $L_Б$ является:

– постоянное значение кривизны, соответствующее исходному;

– величина длины линии соответствует длине исходной окружности;

– есть радиусы, диаметры и центр;

– размеры радиуса и диаметра соответствуют размерам радиуса и диаметра изначальной окружности;

– отображение окружности располагается в плоскости.

Но есть и серьёзные минусы:

– полученная линия не замкнута, её концы не сходятся.

Окружность после переноса оказалась разорванной. Две, соприкасающиеся до переноса, точки (точки разрыва) после переноса оказываются разделёнными. Это однозначно указывает на то, что в отношении этих точек было нарушено *Второе требование к переносу точек*, и вариант $Б_g$ для переноса между пространствами не пригоден.

Вариант $В_g$. Плоскость X_g после переноса в пространство W_c не помещается в плоскость, и её отображение можно представить как коническую поверхность ($X_В$). Вершина конуса $G_В$ соответствует отображению точки-центра G. Все точки, лежащие на поверхности X_g от вершины $G_В$ на расстоянии $r_В$, равном r_g, образуют окружность $L_В$. Эта окружность и будет отображением окружности L_g. Кривизна $k_В$ окружности $L_В$ больше кривизны k_g. Отрезки $r_В$, соединяющие вершину $G_В$ и окружность $L_В$, соответствуют отображениям радиусов r_g и равны им. Диаметру d_g соответствует ломаная из двух отрезков $r_В$.

Плюсами отображения окружности L_g в линию $L_В$ является то, что сохраняется представление, что L_g является окружностью:

– постоянное значение кривизны;

– замкнутость;

– величина длины исходной окружности сохранена;

– отображение находится на поверхности постоянной кривизны;

– есть радиусы, и размеры радиусов соответствуют размерам радиусов изначальной окружности;

– есть линии, отображающие диаметры и центр.

Но есть и серьёзные минусы:

– величина кривизны не соответствует кривизне изначальной окружности;

– линия, отображающая диаметр, является ломаной;

– поверхность, на которой расположено отображение, не является плоскостью.

Вариант $В_g$ бракуем по *Второму требованию к переносу точек*. Здесь имеется изгиб линии $d_В$, являющейся отображением диаметра d_g, в то время как, на диаметре d_g изгиба нет. Получается, окрестности точки $G_В$ отличаются от окрестностей точки G. Точка $G_В$ является отображением точки G, и никаких отличий вблизи точек не должно наблюдаться.

Вариант $Г_g$. По этому варианту перенесённую окружность L_g размещаем на *«сферу» Римана*. Получается линия $L_Г$, отображающая окружность L_g. Она, как и L_g, тоже является окружностью. Радиусы r_g отображаются непрямыми линиями $h_Г$. Все линии $h_Г$ выходят из одной точки $G_Г$. Эта точка соответствует точке G, перенесённой в пространство W_c. Кривизна $k_Г$ больше кривизны k_g.

Плюсами отображения окружности L_g в линию $L_Г$ является то, что сохраняется представление о том, что L_g является окружностью:

– постоянное значение кривизны;

– замкнутость;

– величина длины отображающей линии соответствует длине исходной окружности;

– есть линии, соответствующие исходным радиусам и диаметрам;

– длины линий, отображающих диаметры и радиусы, равны исходным длинам;

– есть точка, соответствующая исходному центру окружности.

Но есть и серьёзные минусы:

– величина кривизны не соответствует кривизне изначальной окружности;

– линии, отображающие радиусы и диаметры, не являются отрезками;

– поверхность, на которую отображаются окружность, диаметры, радиусы и центр, не является плоскостью.

По варианту $Г_g$ нарушения *Требований к переносу точек* не наблюдается.

Варианты $Б_g$ и $В_g$ были забракованы. Остаются опять, пока что, два варианта $А_g$ и $Г_g$: «масштабирование» и перенос на неевклидову поверхность – *«сферу» Римана*.

Если придерживаться мнения, что при переносе окружностей верными оказываются варианты, в которых окружности попадают на *орисферу Лобачевского* и *«сферу» Римана*, то, возможно, *геометрии Лобачевского* и *Римана* и есть те геометрии, которые нам нужны в качестве инструментов при переносе объектов из одного пространства в другое.

Так окружность L_f с центром F и радиусом r_f, лежащая в плоскости X_f, после переноса из пространства W_f в пространство W_c оказывается на *орисфере Лобачевского* X_f’ как линия L_f’, так как пространство W_c является более кривым, чем пространство W_f, и относительная кривизна k_{fc} между ними представляет собой положительную величину (Рис. 6). Линии r_f’ являются отображением радиусов r_f.

Окружность L_g с центром G и радиусом r_g, лежащая в плоскости X_g, после переноса из пространства W_g в пространство W_c оказывается на *«сфере» Римана* X_g’ как линия L_g’, так как пространство W_c является менее кривым, чем пространство W_g, и относительная кривизна k_{gc} между ними представляет собой отрицательную величину ($k_{gc} < 0$). Линии r_g’ являются отображением радиусов r_g.

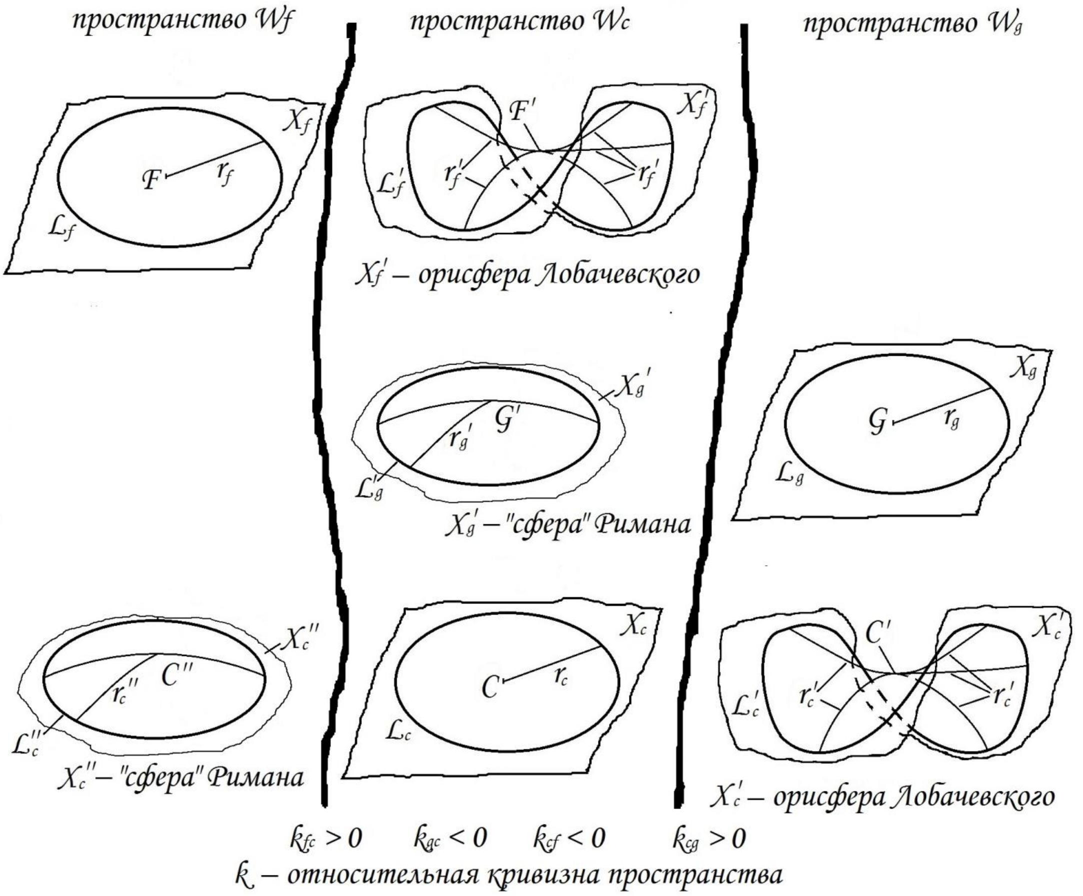

Рис. 6. Перенос окружностей между пространствами разной кривизны

Теперь посмотрим, что представляют собой окружности, переносимые из пространства W_c.

Окружность L_c с центром C и радиусом r_c, лежащая в плоскости X_c, после переноса из пространства W_c в пространство W_f оказывается на *«сфере» Римана* X_c» как линия L_c», так как пространство W_f является менее кривым, чем пространство W_c, и относительная кривизна k_{cf} между ними представляет собой отрицательную величину ($k_{cf} < 0$). Линии r_c» являются отображением радиусов r_c.

Совсем по-другому преобразуется окружность L_c после переноса из пространства W_c в пространство W_g. Она оказывается на *орисфере Лобачевского* X_c’ как линия L_c’, так как пространство W_g является более кривым, чем пространство W_c, и относительная кривизна k_{cg} между ними представляет собой положительную величину ($k_{cg} > 0$). Линии r_c’ являются отображением радиусов r_c.

Итак, при переносе геометрической фигуры в менее кривое пространство мы используем *«сферу» Римана*, и, вероятно, в таком случае следует пользоваться *геометрией Римана*. При переносе геометрической фигуры в более кривое пространство мы используем *орисферу Лобачевского*, и, вероятно, в таком случае следует пользоваться *геометрией Лобачевского*.

Но можно ли использовать *геометрии Лобачевского* и *Римана* при межпространственном переносе? Насколько они для этой роли подходят?

3. *Перенос параллельных*.

Предположим, имеются три пространства W_c, W_f и W_g, в которых применима *евклидова геометрия*, и между ними существует некая относительная кривизна. Так пространство W_c является более кривым по отношению к пространству W_f. Значит, коэффициент кривизны k_{fc} пространства W_c относительно пространства W_f положительный ($k_{fc}>0$). Пространство W_c, наоборот, не такое кривое, как пространство W_g, и поэтому коэффициент кривизны k_{gc} пространства W_c относительно пространства W_g отрицательный ($k_{gc}<0$).

Проведём во всех пространствах параллельные: в пространстве W_c это c_1 и c_2, в пространстве W_f – f_1 и f_2, в пространстве W_g – g_1 и g_2 (Рис. 7).

При переносе из пространства W_f в пространство W_c параллельные линии f_1 и f_2 отображаются непрямыми линиями f_1' и f_2'. При переносе из пространства W_g в пространство W_c параллельные линии g_1 и g_2 отображаются непрямыми линиями g_1' и g_2'.

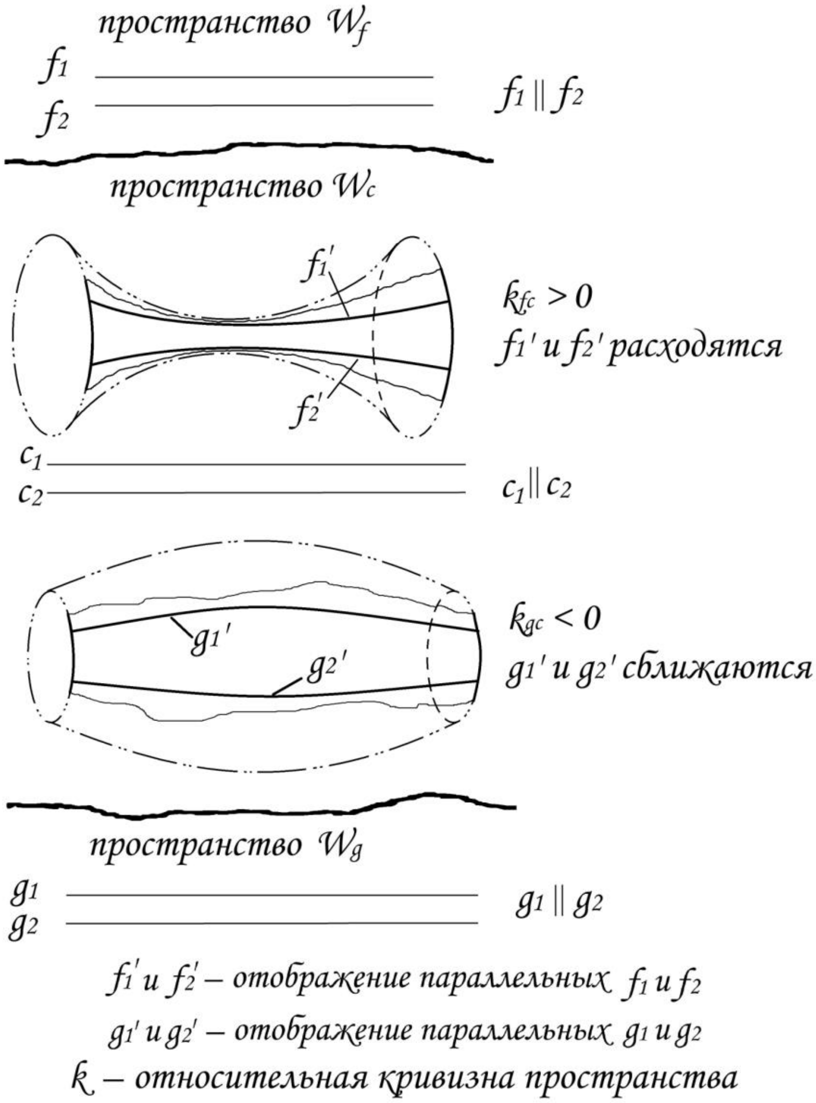

Рис. 7. Перенос параллельных линий в пространствах
с относительной кривизной

В пространстве W_c между параллельными линиями c_1 и c_2 на всём протяжении расстояние неизменно, а между линиями f_1', f_2', g_1' и g_2' оно на протяжении их длины меняется. Причём, меняется расстояние по-разному, и причина этого кроется в том, что кривизна пространства W_c относительно пространства W_f положительная, а кривизна пространства W_c относительно пространства W_g имеет противоположный знак, она отрицательная.

Так как кривизна k_{fc} положительная (k_{fc}>0), то по мере удаления к концам линий f_1' и f_2' расстояние между линиями возрастает. Здесь просматривается аналогия с *геометрией Лобачевского*, где признаётся существование расходящихся прямых [2, 189], то есть таких параллельных, расстояние между которыми не меньше длины общего перпендикуляра [5, 80].

Это значит, что можно построить прямую, пересекающую и ту и другую параллельные линии под прямыми углами (общий перпендикуляр), а в обе стороны от этого перпендикуляра расстояние между параллельными возрастает.

Теорема об общем перпендикуляре к параллельным из *геометрии Лобачевского* соответствует нашему представлению о перенесённых параллельных линиях из более ровного пространства в более кривое, поэтому к линиям f_1’ и f_2’ (линиям, перенесённым из одного пространства в другое), вероятно, применима *неевклидова геометрия*, точнее, *геометрия Лобачевского*. Тем более, что к приёму таких линий наиболее приспособленной является *орисфера Лобачевского*.

Правда, если в *геометрии Лобачевского* считается, что такие линии как f_1’ и f_2’ должны быть непосредственно параллельными, то наши линии f_1’ и f_2’ являются лишь отображениями параллельных из другого пространства. В пространстве W_f линии f_1 и f_2 параллельны, то есть они прямые и непересекающиеся, но их отображения находятся в пространстве W_c и прямыми никак не могут быть. Хотя, по-прежнему, остаются непересекающимися.

Так как кривизна k_{gc} пространства W_c относительно пространства W_g отрицательная ($k_{gc}<0$), то расстояние между линиями g_1’ и g_2’ уменьшается к концам этих линий. Здесь просматривается аналогия с *геометрией Римана*. Эту аналогию усиливает и то обстоятельство, что лучше всего для линий g_1’ и g_2’ подходит *«сфера» Римана*.

Правда, в *геометрии Римана* полагается, что непересекающихся прямых линий, лежащих на одной плоскости, не может быть: «… в геометрии Римана нельзя провести ни одной параллельной» [1, 61], и даже получается, что отображения параллельных линий должны быть пересекающимися.

Пересечению прямых линий всегда предшествует сближение, то есть именно та ситуация, которая наблюдается между линиями g_1’ и g_2’. Но допустить после сближения пересечение линий g_1’ и g_2’ мы никак не можем. Это противоречит одному из *Требований к переносу точек*: две разные точки не могут после переноса занимать одно и то же место. А здесь, две точки с разных линий становятся одной точкой – точкой пересечения, то есть, занимают одно место. Следовательно, линии g_1’ и g_2’ не могут пересекаться, так как они являются отражениями параллельных, непересекающихся линий, g_1 и g_2.

Кроме того, в *геометрии Римана* имеется утверждение: прямые в плоскости всегда должны иметь одну общую точку (*эллиптическая геометрия*) или даже две (*сферическая геометрия*) [3, 9]. Это ещё один закон *геометрии Римана*, утверждающий, что у отображений g_1’ и g_2’ должны быть общие точки – линии g_1’ и g_2’ могут быть только пересекающимися. Хотя, прообразы этих линий, линии g_1 и g_2, пересекающимися не были. Такое допустить невозможно. Кстати, разрешается эта проблема достаточно просто.

Чтобы исключить пересечение линий g_1’ и g_2’ на *«сфере» Римана*, предлагаем следующее. Можно считать, что *«сфера» Римана* и *орисфера Лобачевского* – это одна и та же поверхность, то есть на своих краях *«сфера» Римана* не замыкается сама на себя, а преобразуется в седловину, точнее, в горловину, и меняет знак кривизны. Превращается в *орисферу Лобачевского* (Рис. 8).

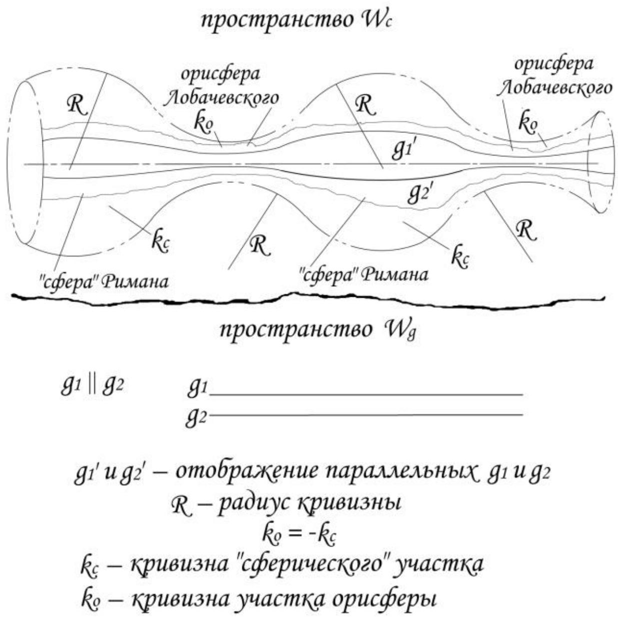

Рис. 8. *Отображение параллельных на поверхность-гирлянду, состоящую из последовательно следующих «сфер» Римана и орисфер Лобачевского*

На некоторой границе *«сфера» Римана* преобразуется в *орисферу*. Пройдя *орисферу* до другого края, можно обнаружить, что знак кривизны поверхности снова меняется, и *орисфера* преобразуется в *«сферу» Римана*. Не в ту, которая уже была, а в новую. И так до бесконечности *поверхности Римана* и *Лобачевского* последовательно сменяют друг друга. Получается своеобразная, общая для *геометрии Лобачевского* и *геометрии Римана*, *поверхность-гирлянда Лобачевского-Римана*.

Что интересно, кривизна поверхности, как на *«сфере»*, так и на *орисфере*, будет одинаковой. При переходе с одного участка на другой меняется лишь знак кривизны на противоположный:

$$k_{о} = -k_{с},$$

где $k_{о}$ – кривизна поверхности на участке *орисферы*,

$k_{с}$ – кривизна *«сферического»* участка поверхности.

Радиус кривизны R по всей поверхности остаётся неизменным.

Линии g_1’ и g_2’ проходят по всей *поверхности-гирлянде* бесконечно долго, нигде не пересекаясь и даже не касаясь друг друга, и уж тем более не замыкаются, как это предлагал Риман: «… прямая есть замкнутая линия конечной длины» [9, 44]. Отображения g_1’ и g_2’ подчиняются законам *геометрии Римана*, но при этом остаются незамкнутыми и непересекающимися линиями.

Поверхность-гирлянда – это лишь наше крайне зыбкое предположение, которое требует, конечно же, тщательнейшего изучения. Такого изучения с нашей стороны ещё не производилось. Мы же, выдвигая предположение о *поверхности-гирлянде Лобачевского-Римана*, только старались подчеркнуть, что могут существовать такие *неевклидовы геометрии*, в которых соблюдаются *Требования к переносу точек*, и не нарушается *Постулат Евклида* – через точку всегда можно провести прямую, параллельную имеющейся прямой [2, 141]. И поэтому, даже отображения параллельных остаются незамкнутыми и непересекающимися линиями.

Поверхность-гирлянда не единственный вариант поверхностей с постоянной величиной кривизны, на которых отображения параллельных будут непересекающимися линиями.

Можно, например, из кусков *«сферы» Римана* собрать ещё одну поверхность постоянной кривизны. К краю куска *«сферы» Римана* можно подставить другой с такой же кривизной, но вывернутый наизнанку (Рис. 9*а*). Далее располагается следующий кусок *«сферы» Римана*. Он, опять же, вывернут наизнанку по отношению к предыдущему куску. Кривизна и, соответственно, радиусы кривизны (R) всех кусков одинаковые. Так до бесконечности.

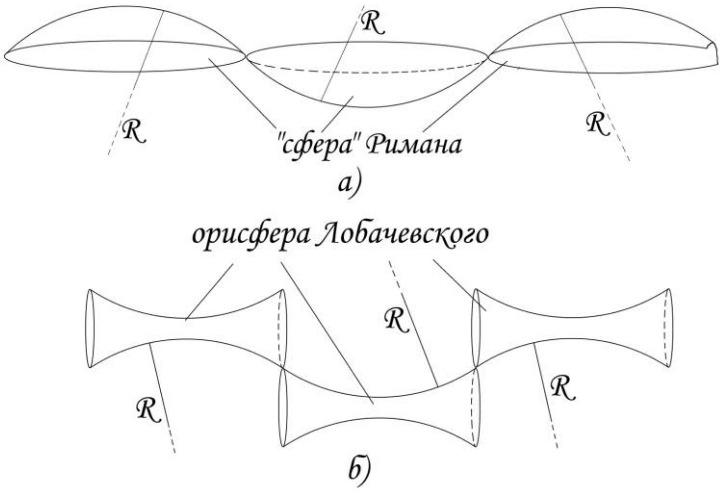

Рис. 9. Поверхности из кусков однотипных неевклидовых поверхностей

Другим примером поверхности постоянной кривизны может служить сборка из кусков *орисферы Лобачевского* (Рис. 9*б*). В бесконечной цепи все куски должны иметь одинаковые радиусы (R) и кривизну.

Недостатком бесконечных поверхностей, состоящих только из кусков *«сферы» Римана* или только из кусков *орисферы Лобачевского* является то, что куски не могут плавно сопрягаться. Этот недостаток не позволяет применять такие поверхности для полноценного проецирования отображений из других пространств.

Наиболее подходящей оказалась *поверхность-гирлянда*.

Итак, *геометрия Лобачевского* и *геометрия Римана* предназначены не для работы с другими пространствами, а являются инструментами для работы с отображениями других пространств. В самих пространствах вполне применима *геометрия Евклида*, но вот для работы с отображениями из других пространств *геометрия Евклида* не годится. Для этих целей могут использоваться *геометрии Лобачевского* и *Римана*.

Правда, в чистом виде *неевклидовы геометрии Лобачевского* и *Римана* недостаточно корректны. В *теориях Лобачевского* и *Римана* имеются существенные недочёты. В обеих следует исправить и даже изъять некоторые утверждения и разделы.

Самым серьёзным недостатком *неевклидовой геометрии* является *Постулат Лобачевского* о том, что в плоскости через точку можно провести не менее двух параллельных к заданной прямой [7, 30]. Этот *Постулат* ошибочен. Его ошибочность можно доказать, и мы обязательно представим такое доказательство, но не в этот раз. Если уж говорить о постулате для *геометрии Лобачевского*, то следует формулировать его так: *в плоскости все прямые являются параллельными*, они не имеют общих точек. В комбинации с *V-ым Постулатом Евклида* получаем следствие: *в плоскости через точку можно провести одну и только одну прямую*.

Мы считаем, *метагеометрия* (теория, объединяющая *евклидову* и *неевклидову геометрии*) может обойтись, не только без *Постулата Лобачевского* (через точку можно провести не менее двух параллельных [2, 164]), но и без *Допущения Римана* (через точку нельзя провести ни одной параллельной [9, 45]). Ведь *поверхность-гирлянда*, состоящая из кусков *«сферы» Римана* и кусков *орисферы Лобачевского,* отменяет и это *Допущение*. Такая поверхность отменяет пересечение отображений параллельных, проходящих по *«сфере» Римана*. Отображения параллельных рано или поздно перейдут со *«сферы» Римана* на *орисферу Лобачевского*. На *орисфере* схождение закончится и начнётся расхождение.

Если полагать, что *геометрии Лобачевского и Римана работают с отображениями из других пространств*, то эти *геометрии* оказываются крайне необходимым звеном, связывающим кривые пространства. Естественно, из этих *геометрий* следует изъять или тщательно переработать всё, что противоречит

Постулату Евклида о параллельных. Кстати, первооткрыватель *неевклидовой геометрии*, немецкий математик Франц Адольф Тауринус, в отличии от Лобачевского и Бойяи, считал, что *Постулат Евклида о параллельных* справедлив всегда, и не может быть никаких других *Постулатов* [9, 43]. Удаление *Постулата Лобачевского* и *Допущения Римана* из *неевклидовых геометрий* делает эти теории только стройнее и понятнее.

Гаусс, кстати, может быть, был самым первым математиком, открывшим законы *неевклидовой геометрии*, но он не решился опубликовать их, потому что ошибочно считал: так как справедлив *Постулат Евклида о параллельных*, то никаких других геометрий не может быть.

В действительности, *неевклидовы геометрии* могут существовать и быть применимы независимо от того, соблюдается или не соблюдается *Постулат Евклида о параллельных*. Они не зависят от него и никак ему не противоречат. Просто не следует путать реальные геометрические объекты с отображениями. Если этого не происходит, то законы *неевклидовой геометрии* уживаются в одном пространстве с *евклидовой геометрией*. Работая с отображениями из других пространств, следует пользоваться *геометриями Римана* и *Лобачевского*, а при работе с реальными объектами незаменима *геометрия Евклида*.

Мы разобрали уже несколько примеров по переносу линий из одного пространства в другое, и, пожалуй, уже можем сформулировать *Правила переноса линий*.

После критического рассмотрения вариантов переноса окружности из пространства в пространство мы выявили, что после переноса окружность может изменять свою форму и кривизну, но не может быть разорванной, а также, на диаметрах не могут возникать перегибы, образующие углы, если таких перегибов не было в первоначальном положении. После переноса параллельных оказалось, что отображения должны оставаться непересекающимися линиями. И можно предположить, что, если бы переносились не параллельные, а пересекающиеся линии, то после переноса на отображениях следовало бы сохранить общую точку (точку пересечения).

Полученные результаты можно обобщить и объединить, создав список *Правил для переноса линий* между пространствами:

1. Перенесённые линии не могут разрываться или заканчиваться, перегибаться с образованием углов, замыкаться или пересекаться, сливаться сами с собой и с другими линиями, если разрывов, окончаний, углов, пересечений, замыканий и слияний не было в изначальном состоянии.

2. Перенесённые линии должны сохранять разрывы, углы, замыкание на себя, иметь пересечения, слияния сами с собой или с другими линиями, а также, иметь окончания, если разрывы, окончания, углы, замыкание, пересечения, слияния были в изначальном состоянии, причём, очерёдность и количество разрывов, углов, пересечений и слияний остаются такими же, какими они были в первоначальном состоянии.

3. Кривизна перенесённой линии может отличаться от кривизны, которая у неё была до переноса.

4. *Перенос и сравнение углов.*

Нами уже сформулированы *Требования к переносу точек* и *Правила переноса линий* между пространствами. Приступая к изучению возможности переноса углов, то есть более сложных объектов, хотелось бы дать определение первому правилу переноса для геометрических фигур: после переноса угла между пространствами угол остаётся углом, причём, абсолютная величина полученного угла равна абсолютной величине угла до переноса. *Правило переноса углов* объясняется *Вторым требованием к переносу точек*: возле точки после её переноса ничто не изменяется, а значит, если точка была вершиной угла, то она и осталась вершиной угла, причём величина этого угла также осталась прежней.

Мы увлеклись анализом метода переноса на неевклидовы поверхности и совершенно забыли про метод «масштабирования». Теперь, имея *Правило переноса углов*, можно вернуться к критике вариантов с «масштабированием». При переносе «масштабированием» между пространствами абсолютные величины углов изменяются, поэтому *Правило переноса углов* нарушается. Следовательно, использовать метод «масштабирования» при переносе из пространства в пространство будет неправильно. В результате получаем, что у нас остаётся рекомендуемым к применению только метод переноса линий и фигур на неевклидовы поверхности – *орисферу Лобачевского* или *«сферу» Римана*.

Тема критики метода «масштабирования» закрыта. У нас остался только метод переноса на неевклидовы поверхности. Продолжим анализ этого метода.

Величину непрямолинейного неплоского угла будем определять следующим образом. Данный угол раскладываем по плоскости, по крайней мере, участки самые близкие к вершине. Возле вершины получается плоский, но криволинейный, угол. К его сторонам через вершину проводим касательные. Величину плоского угла между касательными будем считать величиной изначально данного неплоского непрямолинейного угла.

Рассмотрение непрямолинейных неплоских углов на двухмерной поверхности печатного листа не наглядно, поэтому рассмотрим упрощённую версию – изучим углы неплоские, но прямолинейные.

Предположим, имеется конус с вершиной A (Рис. 10*а*). Поделим конус на четыре равные части. Возьмём одну из четвертей. Пусть это будет четверть, заключённая между осью конуса и лучами A_1A_2, A_1A_3, точки A_2 и A_3 которых принадлежат краю поверхности и совпадают с точками A_2’ и A_3’ в основании конуса. Оценим два угла этой четверти: прямолинейный, но неплоский угол $A_2A_1A_3$ на поверхности конуса; плоский прямолинейный угол A_2’A_4A_3’, вершина A_4 которого принадлежит оси конуса и лежит в его основании. Угол A_2’A_4A_3’ является перпендикулярной проекцией угла $A_2A_1A_3$ на основание конуса. Рассмотрим оба угла на одной плоскости и сравним их величины. Угол развёртки поверхности $A_2A_1A_3$ оказался меньше угла проекции A_2’A_4A_3’. Угол развёртки поверхности конуса всегда будет меньше, чем перпендикулярная проекция этого угла на основание.

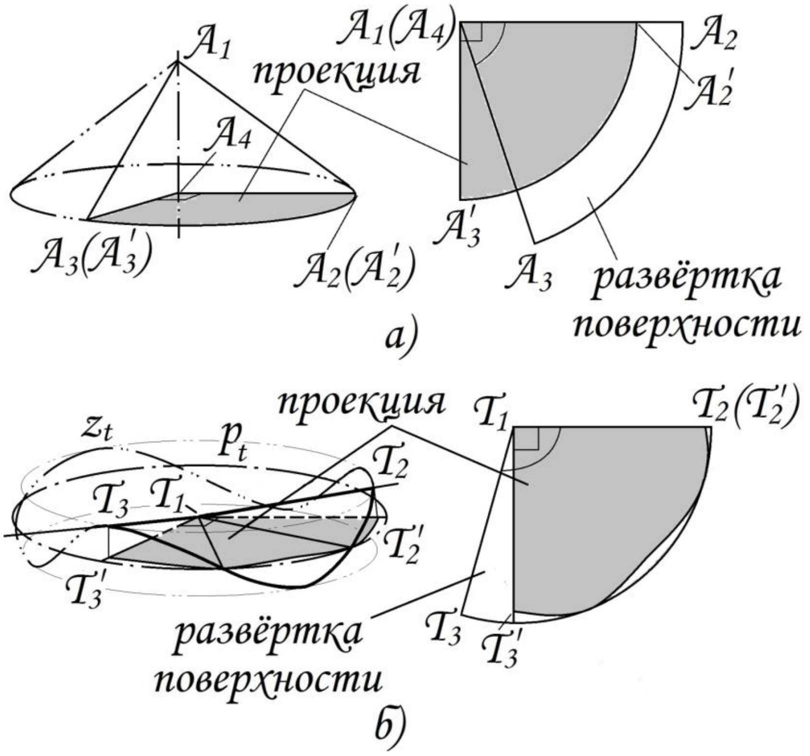

Рис. 10. Представление о величине неплоского угла:

а) на конусе, б) на антиконусе

Совершенно другое соотношение наблюдается между углом при поверхности антиконуса и проекцией этого угла на плоскость. У антиконуса нет и не может быть основания. Кроме того, поверхность конуса, хотя и, неплоская, но всё же имеет положительное значение кривизны. У антиконуса – поверхность с изменяющимся знаком кривизны.

Предположим, имеется антиконус с центром T_1 (Рис. 10*б*). Пусть поверхность антиконуса заканчивается от центра T_1 на расстоянии r_t линией z_t, а расположена поверхность в пространстве так, чтобы любая линия, проходящая на одном расстоянии от центра T_1, представляла собой волнистую линию постоянной по модулю кривизны. У такой линии имеется серединная линия, делящая равно волны, на лежащие от неё с одной стороны и лежащие с другой. Так у линии z_t есть *средняя линия* p_t. Линия p_t представляет собой окружность и находится в одной плоскости X_t с центром T_1. Следует отметить, что все *средние линии* этого антиконуса будут располагаться в плоскости X_t. В совокупности они образуют эту плоскость – *плоскость средних линий антиконуса*.

Поделим поверхность антиконуса на четыре равные части. Одна из четвертей поверхности заключена между лучами T_1T_2 и T_1T_3, у которых точки T_2 и T_3 принадлежат линии z_t. Из точек T_2 и T_3 опустим перпендикуляры на плоскость X_t. В основании пусть будут точки T_2' и T_3'. Сравним два образовавшихся угла: прямолинейный, но неплоский угол $T_2T_1T_3$ на поверхности антиконуса и плоский прямолинейный угол $T_2'T_1T_3'$. Угол $T_2'T_1T_3'$ является перпендикулярной проекцией угла $T_2T_1T_3$ на плоскость X_t. Разложим оба угла на одной плоскости. Угол развёртки поверхности $T_2T_1T_3$ оказался больше угла проекции $T_2'T_1T_3'$. Угол развёртки поверхности антиконуса всегда будет больше, чем угол перпендикулярной проекции этого угла на *плоскость средних линий антиконуса*.

Применим полученный результат к переносу углов между пространствами.

После переноса из пространства в пространство плоский и прямолинейный угол становится неплоским и непрямолинейным. Лучи, обозначающие стороны угла, обращаются в дуги, а плоскость, в которой лежал угол, становиться неровной неевклидовой поверхностью.

Развёртки углов со «*сферы*» *Римана* и *орисферы Лобачевского* на плоскость поместить невозможно. Они представляют собой более сложные фигуры, чем конус и даже антиконус, но по аналогии с развёртками конуса и антиконуса можно сказать, что угол при развёртке со «*сферы*» *Римана* будет меньше, чем угол проекции, а угол развёртки с *орисферы Лобачевского* будет больше, чем угол проекции.

Это несколько противоречит нашим представлениям о проекциях углов на плоскость. Особенно, проекциям углов со сферы. Но не надо путать сферу со «*сферой*» *Римана*. Обычная сфера является наиболее похожей поверхностью на «*сферу*» *Римана,* но заменить её полностью никак не может. Сходство состоит, в первую очередь, в том, что сфера и «*сфера*» *Римана* являются поверхностями постоянной кривизны, и кривизна эта положительная.

Орисфера Лобачевского с седловинами, горловинами или катеноидом Эйлера тоже имеет не слишком большое сходство. Общее для них заключается в знаке кривизны. Для них и *орисферы Лобачевского* знак кривизны отрицательный.

Применим *Правило переноса углов* в примере с переносом углов между пространствами. Особенно интересно исследовать прямые углы, так как у Евклида имеется *IV-ый Постулат* «… все прямые углы равны между собой» [8, 14].

Возьмём те же самые пространства W_c, W_f и W_g. Кривизна K_c пространства W_c больше, чем кривизна K_f пространства W_f:

$$K_c > K_f,$$

но меньше, чем кривизна K_g пространства W_g:

$$K_c < K_g.$$

Предположим, в пространстве W_c имеется плоский прямой угол c_3Cc_4 со сторонами-лучами c_3 и c_4 и вершиной C, в пространстве W_f на плоскости X_f другой прямой угол f_3Ff_4 со сторонами-лучами f_3 и f_4 и вершиной F, в пространстве W_g на плоскости X_g третий прямой угол g_3Gg_4 со сторонами-лучами g_3 и g_4 и вершиной G (Рис. 11).

Перенесённые в пространство W_c углы f_3Ff_4 и g_3Gg_4 приобретают определённые искажения. Но, тем не менее, полученные в пространстве W_c отображения $f_3'F'f_4'$ и $g_3'G'g_4'$ останутся углами, то есть, частью поверхности между двумя, выходящими из одной точки, линиями.

Линии f_3', f_4', g_3' и g_4', отображающие стороны углов f_3Ff_4 и g_3Gg_4, не будут прямыми линиями, как это было в пространствах W_f и W_g. Части поверхностей X_f' и X_g', заключённые между этими линиями, не будут плоскими. Поверхность X_f' представляет собой *орисферу Лобачевского*, а поверхность X_g' – «*сферу*» *Римана*. Эти поверхности являются отображениями плоскостей X_f и X_g.

Углы $f_3'F'f_4'$ и $g_3'G'g_4'$, ни тот ни другой, при попытке совмещения не совпадут с прямым углом c_3Cc_4, хотя в пространствах W_f и W_g они были тоже прямыми, как и угол c_3Cc_4 в пространстве W_c. Причина несовпадения заключается не только в том, что стороны f_3', f_4', g_3' и g_4', в отличие от сторон c_3 и c_4, являются непрямыми, а ещё и в том, что величины углов различаются.

Если через вершины F' и G' провести касательные f_3^*, f_4^*, g_3^* и g_4^* к линиям f_3', f_4', g_3' и g_4', то касательные образуют плоские прямолинейные углы $f_3^*F'f_4^*$ и $g_3^*G'g_4^*$. Эти углы занимают четверть плоскости, то есть являются прямыми.

Следовательно, углы $f_3{}^*F'f_4{}^*$ и $g_3{}^*G'g_4{}^*$ равны углу c_3Cc_4. В пространстве W_c он тоже прямой. Но углы $f_3{}^*F'f_4{}^*$ и $g_3{}^*G'g_4{}^*$ не равны углам $f_3'F'f_4'$ и $g_3'G'g_4'$.

Угол $f_3'F'f_4'$ больше угла $f_3{}^*F'f_4{}^*$. Угол $f_3{}^*F'f_4{}^*$ равен углу c_3Cc_4. Получается, угол $f_3'F'f_4'$ больше прямого угла c_3Cc_4. При этом угол $f_3'F'f_4'$ равен прямому углу f_3Ff_4 (согласно *Правилу переноса углов*). Следовательно, прямой угол f_3Ff_4, находящийся в пространстве W_f больше прямого угла c_3Cc_4, находящегося в пространстве W_c.

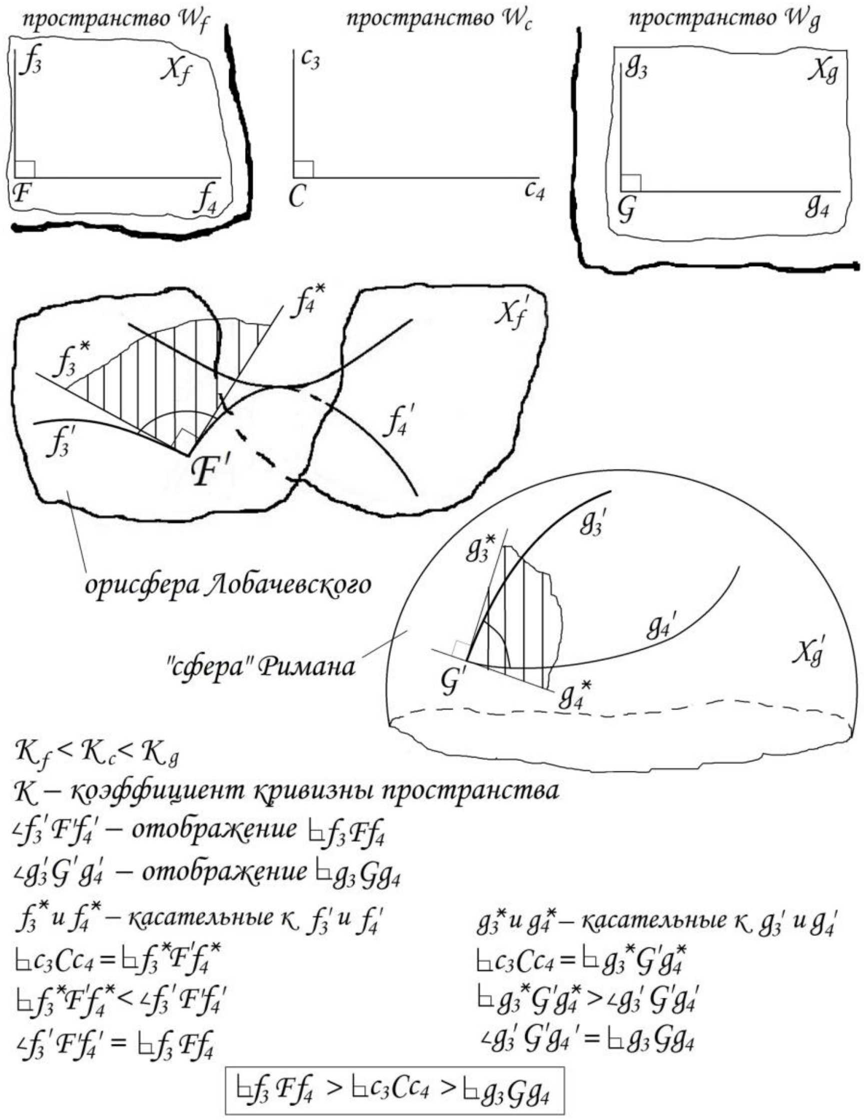

Рис. 11. *Сравнение величин прямых углов из пространств, отличающихся коэффициентами кривизны*

Угол $g_3'G'g_4'$ меньше угла $g_3{}^*G'g_4{}^*$. Следовательно, он меньше прямого угла c_3Cc_4, так как угол $g_3{}^*G'g_4{}^*$ равен углу c_3Cc_4. При этом угол $g_3'G'g_4'$ равен прямому углу g_3Gg_4 (согласно *Правилу переноса углов*). Следовательно, прямой угол g_3Gg_4 из пространства W_f меньше прямого угла c_3Cc_4 из пространства W_c.

Итак, при переносе угла из одного пространства в другое абсолютная величина угла не изменяется, но вот относительная меняется качественно. А значит, если для пространств W_f и W_g углы f_3Ff_4 и g_3Gg_4 были прямыми, то есть составляли одну четверть от полного угла, то в пространстве W_c отображения этих углов таковыми уже быть не могут. Учитывая, что величины углов-отображений равны изначальным углам, то прямые, развёрнутые и полные углы одного пространства не равны прямым, развёрнутым и полным углам другого пространства. А также доли таких углов, взятых в одном пространстве, не равны соответствующим долям в другом пространстве.

Отображения прямых углов пространств W_f и W_g нельзя наложить на прямой угол пространства W_c, потому что стороны углов-отображений не являются прямыми линиями. Кроме того, в абсолютном измерении величина прямого угла из пространства W_c отличается от абсолютных величин прямых углов пространств W_f и W_g. Прямой угол c_3Cc_4 из пространства W_c меньше прямого угла f_3Ff_4 из пространства W_f, но больше прямого угла g_3Gg_4 из пространства W_g.

Между пространствами W_c, W_f и W_g не работает *IV-ый Постулат Евклида*. Прямые углы одного пространства не равны прямым углам другого. Уже только это указывает на то, что для таких случаев нужна другая геометрия, отличная от *евклидовой*.

Мы всё время подыскиваем подтверждения нашей мысли о том, что *геометрия Лобачевского* и *геометрия Римана* должны выполнять работы с отображениями из других пространств. Так, на наш взгляд, достаточно красноречиво говорит об этом цитата Клейна: «Аксиоматические исследования этого периода (первая половина XIX века – *пояснение автора*) весьма ненаглядны и крайне трудны для понимания, так что вполне можно говорить о «дебрях дремучего леса исчислений Лобачевского». Проективное мероопределение … предлагает удобную просеку через этот дремучий лес…» [6, 302]. То есть, синтез *проективной геометрии* и *неевклидовых геометрий Лобачевского* и *Римана* может позволить решить задачи неподдающиеся *евклидовой геометрии*. Отображения же пространств с иной кривизной – это и есть те задачи, к которым следует применять *неевклидову геометрию* в сочетании с *проективной*.

Если произвести тщательную ревизию *геометрии Лобачевского* и *геометрии Римана*, то они вполне окажутся пригодными для работы с объектами из других пространств. Ревизия и корректировка *теорий Лобачевского* и *Римана* нужна очень глубокая, но, тем не менее, имеются некоторые признаки применимости этих *теорий* для выполнения задач по работе с отображениями из иных пространств. Кроме того, в настоящее время не существует для этих *теорий* каких-либо альтернатив.

5. *Перенос треугольников и сравнение сумм углов.*

В пространствах W_c, W_f и W_g построим одинаковые плоские прямолинейные треугольники, то есть с равными длинами соответствующих сторон: в пространстве W_c – треугольник $C_1C_2C_3$, в пространстве W_f – треугольник $F_1F_2F_3$, в пространстве W_g – треугольник $G_1G_2G_3$ (Рис. 12). Отображения треугольников $F_1F_2F_3$ и $G_1G_2G_3$ в пространстве W_c, полученные в результате переноса, будут неплоскими треугольниками $F_1'F_2'F_3'$ и $G_1'G_2'G_3'$.

На сторонах F_1F_2, F_1F_3 возьмём произвольно точки F_4 и F_5. Соединим их. Образовался треугольник $F_1F_4F_5$. Отображение $F_1'F_4'F_5'$ этого треугольника в пространстве W_c тоже будут треугольником, но только не плоским. Его вершины F_4', F_5' и стороны $F_1'F_4'$, $F_1'F_5'$ будут располагаться на сторонах треугольника $F_1'F_2'F_3'$ в согласии с *Первым требованием к переносу точек*.

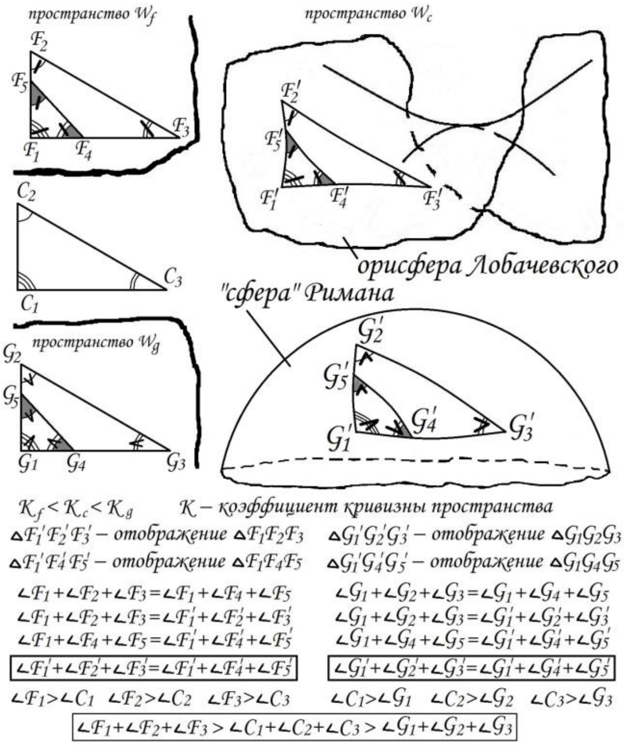

Рис. 12. Сравнение треугольников разных пространств

В *евклидовой геометрии* сумма углов в любом прямолинейном плоском треугольнике равна сумме углов любого другого плоского прямолинейного треугольника. Следовательно, сумма углов F_1, F_2 и F_3 равна сумме углов F_1, F_4 и F_5.

Согласно *Правилу переноса углов*, углы треугольника F_1’F_2’F_3’ равны по величине углам треугольника $F_1F_2F_3$, углы треугольника F_1’F_4’F_5’ равны по величине углам треугольника $F_1F_4F_5$. Значит, сумма углов F_1, F_2 и F_3 равна сумме углов F_1’, F_2’ и F_3’, а сумма углов F_1, F_4 и F_5 равна сумме углов F_1’, F_4’ и F_5’. И вообще, отображение любого плоского прямолинейного треугольника из пространства W_f в пространство W_c будет треугольником с суммой углов, равной сумме углов треугольника $F_1F_2F_3$. Из этого следует, что сумма углов F_1’, F_2’ и F_3’ равна сумме углов F_1’, F_4’ и F_5’.

Суммы углов треугольников $F_1F_2F_3$ и $F_1F_4F_5$ в пространстве W_f равны между собой и равны суммам углов треугольников F_1’F_2’F_3’ и F_1’F_4’F_5’, являющихся их отображениями после переноса в пространство W_c.

На сторонах G_1G_2 и G_1G_3 возьмём произвольно точки G_4 и G_5. Соединим. Образовался треугольник $G_1G_4G_5$. Отображение G_1’G_4’G_5’ этого треугольника в пространстве W_c тоже будет треугольником, но только не плоским. Его вершины G_4', G_5' и стороны G_1'G_4', G_1'G_5' будут располагаться на сторонах треугольника G_1'G_2'G_3' (согласно *Первому требованию к переносу точек*).

Треугольники $G_1G_2G_3$ и $G_1G_4G_5$ плоские прямолинейные и находятся в одном пространстве W_g. Следовательно, сумма углов G_1, G_2 и G_3 равна сумме углов G_1, G_4 и G_5.

Величины углов треугольника G_1'G_2'G_3' равны величинам углов треугольника $G_1G_2G_3$ (согласно *Правилу переноса углов*). Сумма углов G_1, G_2 и G_3 равна сумме углов G_1', G_2' и G_3'. Аналогичными рассуждениями можно получить, что сумма углов G_1, G_4 и G_5 равна сумме углов G_1', G_4' и G_5'. Следовательно, сумма углов G_1', G_2' и G_3' равна сумме углов G_1', G_4' и G_5'.

Суммы углов треугольников $G_1G_2G_3$ и $G_1G_4G_5$ равны между собой и равны суммам углов треугольников-отображений G_1'G_2'G_3' и G_1'G_4'G_5'.

Обобщаем. Суммы углов во всех перенесённых треугольниках из одного пространства во второе равны между собой и по-прежнему равны сумме углов треугольников пространства, из которого они перенесены.

Сумма углов треугольников из других пространств отличается от суммы углов треугольника $C_1C_2C_3$ из пространства W_c. Так углы F_1, F_2 и F_3 больше соответствующих углов C_1, C_2 и C_3, и в сумме они тоже будут больше суммы углов треугольника $C_1C_2C_3$. Углы G_1, G_2 и G_3 меньше соответствующих углов C_1, C_2 и C_3, и в сумме они тоже будут меньше суммы углов треугольника $C_1C_2C_3$.

Суммы углов плоских прямолинейных треугольников из разных пространств отличаются между собой. Причём, сумма углов из более кривого пространства всегда меньше суммы углов из более ровного пространства.

6. *Сравнение окружностей равных диаметров.*

В пространствах W_c, W_f и W_g вернёмся к прямолинейным плоским прямым углам c_3Cc_4, f_3Ff_4 и g_3Gg_4.

Предлагаем построить дуги l_c, l_f и l_g между лучами c_3, c_4, f_3, f_4, g_3 и g_4 с центрами в точках C, F и G (Рис. 13). Радиусы у всех дуг пусть будут одинаковые (r). А так как углы c_3Cc_4, f_3Ff_4 и g_3Gg_4 имеют разную абсолютную величину, то надо ожидать, что длины дуг l_c, l_f и l_g будут разные. В соответствии с абсолютными величинами углов c_3Cc_4, f_3Ff_4 и g_3Gg_4, дуга l_f будет самой большой, дуга l_c – поменьше, дуга l_g – самая короткая:

$$l_f > l_c > l_g.$$

Дуги l_c, l_f и l_g продолжим и замкнём. Получаются окружности L_c (C, r), L_f (F, r) и L_g (G, r).

Дуга l_c представляет собой четверть окружности L_c (C, r), дуга l_f – четверть окружности L_f (F, r), а дуга l_g – четверть окружности L_g (G, r). А это значит, что длина окружности L_f (F, r) больше длины окружности L_c (C, r), а длина окружности L_c (C, r) больше длины окружности L_g (G, r):

$$L_f\,(F, r) > L_c\,(C, r) > L_g\,(G, r).$$

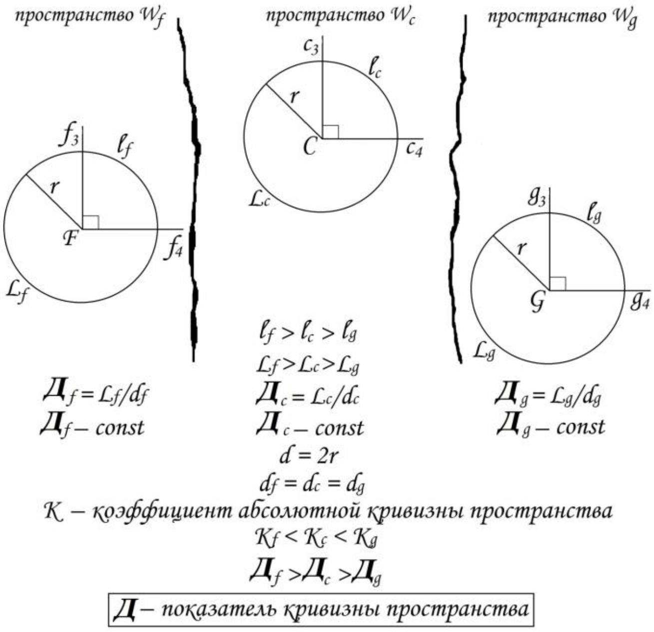

Рис. 13. *Сравнение окружностей из пространств с постоянными коэффициентами кривизны*

Пусть

$$L_c\,/d_c = Д_c,$$

$$L_f\,/d_f = Д_f,$$

$$L_g\,/d_g = Д_g,$$

где d_f, d_c, d_g – диаметры окружностей L_f (F, r), L_c (C, r), L_g (G, r).

В *евклидовом пространстве* отношение длины окружности к диаметру является величиной постоянной. Странным образом Евклид это утверждение в своих *Началах* не доказывает, не объявляет *Постулатом* и даже не упоминает о нём. Мы же не можем обойти это утверждение стороной:

$Д_c$ – постоянная величина пространства W_c,

$Д_f$ – постоянная величина пространства W_f,

$Д_g$ – постоянная величина пространства W_g.

Получается, что *показатель Д*, представляющий собой *отношение длины окружности к диаметру, является характеристикой конкретного пространства*. *Показатель Д* может служить уникальным маркером этого пространства. Так, например, «число Пи» (3,1415…) – это маркер пространственно-временного континуума, в котором находится наша Вселенная на данном промежутке времени.

Диаметр равен удвоенной величине радиуса, а так как радиусы у окружностей L_f (F, r), L_c (C, r) и L_g (G, r) равные, то и диаметры равны:

$$d_f = d_c = d_g.$$

Получаем,

$$L_f / d_f > L_c / d_c > L_g / d_g.$$

То есть,

$$Д_f > Д_c > Д_g.$$

Напомним, кривизна пространства W_c больше, чем кривизна пространства W_f:

$$K_c > K_f,$$

где K_f – абсолютная кривизна пространства W_f,

K_c – абсолютная кривизна пространства W_c.

Кривизна пространства W_g больше, чем кривизна пространства W_c:

$$K_g > K_c,$$

где K_g – абсолютная кривизна пространства W_g.

Итак,

$$K_f < K_c < K_g.$$

У *показателя Д* всё наоборот. *С возрастанием кривизны пространства отношение длины окружности к диаметру уменьшается*. *Показатель Д* становится меньше.

С изменением абсолютной кривизны *показатель Д* тоже меняется. Получается, *показатель Д* является не только *маркером пространства*. У него имеется определённый физический смысл. *Показатель Д* характеризует *кривизну пространства*. *Показатель Д* – это *показатель кривизны пространства*.

7. *Основной закон физики и кривизна пространства*.

Нашему исследованию не хватает, на наш взгляд, ещё одного очень важного *Утверждения*.

Объектом геометрических исследований являются геометрические фигуры и тела. В действительности же, никаких фигур и тел не существует. Существует только пространство. Не имея возможности охватить всё пространство, мы лишь вычленяем участки (геометрические фигуры и тела) и пытаемся изучить свойства этих пространственных участков. На самом деле, получается, что конечной целью наших исследований является познание пространства. Без существования физического пространства, окружающего нас, и без желания познать и освоить это пространство не возникло бы геометрии, и тем более не появились бы математические пространства (абстрактные, воображаемые и невообразимые) [9, 3–4].

Предлагаем вернуться к началам, и вспомнить, что в самом основании геометрии находится пространство нашей Вселенной, то есть физический объект. Этот физический объект обязан соответствовать законам физики. Самый же главный закон физики заключается в том, что *не существует ничего абсолютного*. Из этого делаем вывод, что идеальных пространств не бывает. Любое физическое пространство имеет дефекты. Оно не может быть абсолютно ровным. То есть, можно утверждать, что *любое физическое пространство имеет кривизну*.

Измерения пространства Вселенной, проводившиеся, в частности, Гауссом и Лобачевским, никаких искривлений не обнаружили [9, 48]. Это и следовало ожидать.

Во-первых, нет никаких гарантий, что измерительные инструменты не искривляются в соответствии с кривизной пространства. Скорее наоборот. Они обязательно растянуты, сжаты и изогнуты в соответствии кривизне окружающего пространства. Независимых измерительных инструментов не существует.

Во-вторых, используемые инструменты (лучи, инерция и вектор силы) подвержены влиянию электромагнитных полей и гравитации, создаваемых бесконечным количеством различных объектов, рассеянных в пространстве хаотично. Предугадать и нивелировать это влияние нет возможности. Если и будет обнаружена «кривизна пространства» такими инструментами, то это, скорее всего, будет кривизна электромагнитных и гравитационных полей в тех местах, где производились замеры, чем действительная кривизна пространства.

В-третьих, предположение, что, если пространство имеет искривления, то в нём не соблюдается *евклидова геометрия,* ошибочно. Наше пространство, несомненно, имеет кривизну, а *евклидовой геометрией* все пользуются и не испытывают при этом никаких затруднений.

Методы, которыми до настоящего времени пытались обнаружить кривизну пространства Вселенной, не давали результата, поэтому полагалось, что окружающая нас среда идеальна или почти идеальна. А возможность пользоваться *евклидовой геометрией* подкрепляла это мнение. В действительности, всё совсем не так. В реальном мире нет ничего идеального, а значит, обязательно имеется некоторая кривизна. Кроме того, в искривлённом пространстве нет никаких препятствий в применении *евклидовой геометрии*.

Итак, наше пространство и любые другие физические пространства имеют кривизну.

8. *Немного о пространствах постоянной кривизны и пространствах с изменяющейся кривизной.*

Прежде чем подвести итоги нашего исследования, необходимо сделать ещё два пояснения.

Фактически пространства, которые фигурировали в нашем исследовании, являются *пространствами постоянной кривизны*. Но так как этот термин уже занят, и занят он под пространства, которые никак не похожи на те, о которых в нашей статье идёт речь [4, 6], то нам приходится изобретать некое новое название, чтобы не происходило путаницы. Это основная причина, по которой мы используем для названия тех пространств, которые исследуем, столь длинное словосочетание – *пространства с постоянным коэффициентом кривизны*.

Отличие состоит в том, что существующая геометрическая теория и теория, предлагаемая в данной статье, по-разному относятся к плоскому и прямому. Современная *метагеометрия* опирается на то, что в кривом пространстве невозможно построить прямую линию. Мы же исходим из того, что в любом пространстве через любую его точку можно построить прямую линию и плоскую поверхность. Только прямизна и плоскость эти не абсолютны. Линия является прямой, а поверхность плоской только для пространства, в котором они построены. В других пространствах ни о какой прямизне именно этой линии и ровности именно этой поверхности говорить не приходится.

Прямой и плоский – эти понятия являются относительными и при этом допустимы в пространствах с любой кривизной. Такой взгляд на базовые геометрические понятия приводит к совершенно новому представлению об основах *общей геометрии*, поэтому не следует путать наши *пространства с постоянным коэффициентом кривизны* с, используемыми в современной геометрии, *пространствами постоянной кривизны*.

Следующее важное пояснение.

В нашем исследовании мы говорили только о *пространствах с постоянными коэффициентами кривизны* и ничего о *пространствах с изменяющейся кривизной*. Дело в том, что любое *пространство с изменяющейся кривизной* всегда можно расчленить так, чтобы получившиеся части пространства оказывались с постоянным коэффициентом кривизны или, по крайней мере, изменение кривизны в такой части было бы настолько малым, что им можно было бы пренебречь. После вычленения из пространства частей с постоянным коэффициентом кривизны, внутри этих частей можно будет пользоваться *геометрией Евлида*, а во взаимодействиях между частями применять неевклидовы методы. Практически, всё также как у *пространств с постоянным коэффициентом кривизны*, только вместо цельных пространств работаем с частями одного пространства.

9. *Список основных положений общей геометрии.*

В ходе исследования мы выдвигали *Утверждения*. Понимая недоказуемость этих *Утверждений,* мы пытались только обосновать необходимость и раскрыть их сущность. Теперь полагаем, следует собрать все *Утверждения* в некий свод законов для *общей геометрии*.

Под *общей геометрией* мы подразумеваем раздел геометрии, в котором описываются базовые свойства пространства и создаётся общее представление о пространстве. На основании этого регламентируются области применения различных геометрических теорий – *евклидовой* и *неевклидовых геометрий*.

Основные положения общей геометрии:

– любое физическое пространство имеет кривизну;

– кривизна пространства проявляет себя через отношение длины окружности к диаметру (с возрастанием кривизны отношение уменьшается);

– в любом пространстве применима *евклидова геометрия*;

– при отображении из одного пространства в другое, в частности, при переносе, геометрическая форма отображённого объекта изменяется, поэтому нецелесообразно в такой ситуации применять к нему *евклидову геометрию*, в этом случае следует пользоваться *неевклидовыми геометриями*;

– если объект, отображается из пространства с меньшей кривизной, то применима *геометрия Лобачевского*, а если, наоборот, из пространства с большей кривизной, то применима *геометрия Римана*.

Вероятно, мы делаем ошибку, привлекая *геометрию Лобачевского* и *геометрию Римана* в качестве инструментов для работы с объектами, переносимыми или отображаемыми из других пространств. Ведь этим теориям требуется очень глубокая коррекция. Кроме того, может так оказаться, что к отображённым, а тем более, перенесённым из других пространств, предметам, применима совершенно другая геометрия. Но в настоящее время нет ничего, на чём мы смогли бы получить практический опыт. Нет ни тел, ни фигур, ни линий, о которых можно было бы сказать: «Вот этот предмет не принадлежит нашей Вселенной. Он прибыл из другого пространства» или «Смотрите. Перед нами отображение иного пространства». Поэтому, насколько ошибочен *наш «V-ый Постулат»*, доказывать предстоит когда-нибудь, но не сегодня. Первые же четыре наших *Утверждения* кажутся вполне независимыми и необходимыми.

Хотелось бы взглянуть на иные пространства?

У пространства с иной кривизной будет совсем не такая, как у нас, природа. И физика, и даже химия будут другими.

Периодическая таблица Менделеева пригодна только для нашего пространства и близких к нашему по кривизне. Так, при значительном уменьшении кривизны пространства произойдёт качественный скачок, и литий окажется в одной строке с водородом и гелием. Конечно же, это будут теперь не литий, водород и гелий. Это, по-прежнему, будут три первых элемента периодической таблицы, но свойства у них будут несколько отличаться от свойств первых трёх элементов менделеевской таблицы. Во втором периоде (во второй строчке таблицы) количество элементов тоже существенно возрастёт, и так далее. Во всех периодах элементов станет больше, чем это предусмотрено в таблице Менделеева.

Если же взять пространство со значительно большей кривизной, то картина будет противоположная. В первом периоде останется один элемент, во втором – меньше восьми. В каждом следующем периоде химическом элементов будет меньше, чем это предусматривает периодический закон Менделеева.

Объясняется всё достаточно просто. В пространствах с меньшей кривизной в электронных оболочках атома помещается больше электронов, чем допустимо в нашем пространстве, а в пространствах с большей кривизной, наоборот, меньше. И значит, при уменьшении кривизны в ближайшей к ядру оболочке может поместиться не два, а три электрона. Таким образом, «литий» оказывается в одном химическом периоде с «водородом» и «гелием». При увеличении кривизны на электронной оболочке остаётся место лишь для одного электрона, и второй элемент химической таблицы уже не может удерживать на ближайшей к ядру оболочке второй электрон и, следовательно, переходит из первого химического периода во второй, оказываясь в одной строке таблицы с третьим, четвёртым химическими элементами.

Таким образом – свойства пространства влияют на свойства материи.

Тема интересная, но выходит за рамки геометрической науки. Ответы же на геометрические вопросы, связанные с переносом между пространствами линий и элементарных геометрических фигур, на наш взгляд, даны исчерпывающие.

Список литературы

1. Александров П.С. Что такое неэвклидова геометрия / П.С. Александров // Академия педагогических наук. Педагогическая библиотека учителя. – М.: Академии педагогических наук РСФСР, 1950. – 71 с.

2. Атанасян С.Л. Геометрия 2: учебное пособие для вузов / С.Л. Атанасян, В.Г. Покровский, А.В. Ушаков; под ред. С.Л. Атанасяна. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2020. – 544 с.

3. Богомолов С.А. Введение в неевклидову геометрию Римана / С.А. Богомолов. – М.: ОНТИ Государственное технико-теоретическое издательство, 1934 – 226 с.

4. Вульф Д.А. Пространства постоянной кривизны / Д.А. Вульф; пер. с англ. Ю.Д. Бураго. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982 – 460 с.

5. Горшкова Л.С. Основания геометрии: учебное пособие для студентов педагогических вузов / Л.С. Горшкова, М.В. Сорокина. – Пенза: Пензенский государственный педагогический университет им. В.Г. Белинского, 2009. – 144 с.

6. Клейн Ф. Неевклидова геометрия / Ф. Клейн, пер. Н.К. Ерушлинского. М.: Объединённое научно-техническое изд-во, 1936. – 356 с.

7. Кутузов Б.В. Геометрия Лобачевского и элементы оснований геометрии: пособие для учителей средней школы / Б.В. Кутузов. – М.: Гос. учебно-педагогическое изд-во Министерства просвещения РСФСР, 1950. – 127 с.

8. Начала Евклида. Книги I-VI. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. – 447 с.

9. Энрикес Ф. Начала геометрии / Новые идеи в математике. Сборник девятый. Непериодическое издание, выходящее под редакцией заслуженного профессора А.В. Васильева / Ф. Энрикес. – СПб.: Образование, 1914. – 171 с.

10. Kutuzov B.V. (1950) Geometriia Lobachevskogo i elementy osnovanii geometrii. M.: Gos. uchebnopedagogicheskoe izd-vo Ministerstva prosveshcheniia RSFSR, p. 127.

11. Nachala Evklida. Knigi I-VI. M.: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoi literatury; L., 1948, p. 447.

Чемерис Владимир Дмитриевич – магистр техн. наук, инженер, Россия, Екатеринбург.

Чемерис Мирон Андреевич – учащийся, средняя школа им. Мак-Кинли, Соединённые Штаты Америки, Вашингтон.

Чемерис Василиса Владимировна – учащаяся, Россия, Екатеринбург.