***Павлов Андрей Валерианович***

канд. физ.-мат. наук, доцент

ФГБОУ ВПО «Московский государственный

технический университет радиотехники,

электроники и автоматики»

г. Москва

*DOI 10.21661/r-559682*

# ПЕРИОДИЧНОСТЬ В РАЗНЫХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ И ОБРАТНЫЕ ФУНКЦИИ

***Аннотация****: в статье рассматривается периодичность в разных системах координат и обратные функции. Доказано, что производная обратной функции с точки зрения двух систем координат становится периодичной с некоторым действительным периодом для широкого класса аналитических функций. Аналогичный результат получается, как следствие введения новой системы координат и рассмотрения уравнений одного многообразия в этих системах с разных точек зрения. В относительно общих условиях после введения новой системы координат одно геометрическое многообразие имеет одно уравнение как в исходной, так и в новой системе координат, что возможно только в случае периодичности исходной функции. Аналогичный результат получен для произвольных функций двух переменных. Доказана теорема об аналитическом продолжении функции через вертикальную границу области аналитичности.*

***Ключевые слова****: периодичность аналитической функции, неоднозначность представления функций, разные системы координат, поля сдвигов.*

Введение.

В статье рассматриваются обобщенная периодичность аналитических функций, возникающая при рассмотрении уравнений с точки зрения разных систем координат (теоремы 1–3), [1]. Возможность периодичности, которую мы не предполагали по условию, хорошо иллюстрирует примеры 1,2 из доказательства теорем 1, 3. Нам понадобятся обозначения: сдвинутая направо на величину A функция $f(p)$ совпадает при всех $p = w$ с функцией $f_1(w) = f(p - A)$, которая одновременно является уравнением одного и того же многообразия $C_f = \{(p,z): z = f(p)\}$ в системе координат с центром в точке $(-A,0)$ и комплексной переменной w, A>0; аналогично $f_2(r) = f(p + A)$ при всех $p = r$, и уравнение $z = f_2(r)$ является уравнением исходного многообразия $C_f = \{(p,z): z = f(p)\}$ в системе координат с центром в точке $(A,0)$ и комплексной переменной r, A>0.

В первом примере по определению $f_{right}(r) = f_2(r) = f(r + A), A > 0$. Очевидно для обратных функций выполнено равенство $f_{right}^{(-1)}(z) + A = f^{(-1)}(z)$ в области аналитичности и однолистности G обеих функций, $A > 0$; данный факт следует из $f_{right}^{(-1)}(z) = -b + iy, f^{(-1)}(z) = A - b + iy,$ при всех $z$ из области значений $z = f(p)$; данное равенство влечет совпадение производных функций $f_{right}^{(-1)}(z), f^{(-1)}(z)$ в случае аналитичности и однолистности обратных функций. Совпадение выражений производных обратных функций в свою очередь влечет совпадение аналитических выражений производных функций $df_{right}(p)/dp = df(p)/dp$ в произвольной области однозначности данных функций. Совпадение аналитических выражений производных влечет периодичность производных с параметром A в области аналитичности и однолистности прямых и обратных функций $f_{right}, f$. (Мы использовали то, что многообразие производных $C_f$ в системе координат с переменной $r$ при любом $A$). Доказанный факт, например, выполнен для функции $z = 1/p$ в области

$$G = \{p: -\pi/2 < arg\ p < \pi/2 \bigcap Re\ p > \varepsilon > 0\},$$

(теорема 3).

Данный пример в теореме 3 приводит к возможности аналитически продолжить любую производную аналитической в некоторой открытой области G функцию сдвинутой направо на величину A>0 функцией в условиях теоремы 3 (в виде аналитического выражения).

Аналогичный факт вытекает из рассуждения второго примера: уравнение $z = f_2(r)$ в системе координат с переменной $p$ имеет вид $z = f(p - A), r + A = p$, (переменная $r$ - комплексное число в системе координат с центром в $(A,0)$, переменная $p$ – комплексное число в системе координат с центром в $(0,0)$). При каждом $z$ и комплексном числе $R=p$ равенство $z=f(R-A)$ также выполнено в системе координат с переменной $r$, так как, отложив вектор $R=p$ от центра координат в точке $(A,0)$ после вычитания $A>0$ мы получим вектор $R-A=w$, значение в котором совпадало с числом $z$ из уравнения $z=f(p-A)$ в системе координат с центром в $(0,0)$. Мы получили, что два одинаковых уравнения $z=f(p-A)$, $z=f(R-A), R=r,$ являются уравнением одного исходного многообразия в разных системах координат, сдвинутых одна относительно другой на $A>0$. Данный факт возможен только в случае периодичности исходной функции (теорема 1).

В теореме 2 аналогичный результат получен несколько другим методам. В данной теореме и теореме 1 в достаточно общих условиях доказана периодичность аналитической в открытой окрестности мнимой оси функции, [1, 2]. В теореме 2 не используются формулировки и доказательства примеров введения и теорем 1, 3.

Теорема 1 как и примеры 1, 2 введения, является обоснованием основного утверждения теорем 2, 3 о том, что с точки зрения обратной функции и сопоставления точек плоскости, а не аналитических выражений функций, существует два уравнение одного многообразия $z=f(w), z=f(w-A)$ в некоторой новой системе координат, $A>0$. Результаты теорем 1,2,3 эквивалентны периодичности исходной функции, [1, 3].

Применение результатов статьи к задачам механики и математической физики очевидно вытекает из совпадения аналитических функций с результатом сдвига этих функций с точки зрения новых систем координат, [1, 2].

1. *Аналитические функции для разных систем координат*.

В теореме 1 приводится доказательство периодичности произвольной аналитической функции в относительно общих условиях, [1, 3]. Утверждение теоремы 1 становится естественным с точки зрения примеров введения, использующих только обыкновенные факты комплексного анализа. Отметим, что два разных уравнения одного многообразия влечет периодичность с периодом $A$ в случае аналитических функций $f(p)$, [1, 3, 7], которую мы не предполагали.

*Теорема 1.*

С точки зрения разных систем координат с центрами в точках $(0,0)$ и $(A,0)$ одно и то же многообразие имеет одинаковое аналитическое уравнение $z = f(P-A), A > 0,$ при всех $P = p$ и $P = r$, для произвольной аналитической в открытой односвязной области $G$ функции $z = f(p)$, $(0,0) \in G, (A,0) \in G$, (пример 2 введения).

*Доказательство.*

Теорема 1 является непосредственным следствием второго примера введения. (См. также пример 1 для производных аналитических функций). В доказательстве теоремы 2 используются несколько другие по сравнению с примерами 1, 2 введения методы.

*Теорема 2.*

С точки зрения введения новых систем координат относительно переменных $w_1$, $w$ и $p$ с центрами, соответственно, в точках $(-2A,0)$, $(-A,0)$ и $(0,0)$ аналитическая в открытой односвязной области G, содержащей эти три точки, функция $f(p)$ становится периодичной с периодом $A > 0$.

*Доказательство.*

Как и во введении рассматривается уравнение $z = f_1(w) = f(w-A)$ многообразия $C_f$ во второй системе координат с центром в точке $-A,0)$.

Заметим, что уравнение $z = f_1(p) = f(p-A)$ совпадает с уравнением многообразия $C_f$ во второй системе координат с переобозначенной переменной $p$ вместо $w$. Перепишем равенство $z = f(p)$ в форме $z = f((p+A)-A) = f(w-A)$. С точки зрения отмеченного факта это – уравнение перемещенного (сдвинутого) во второй центр $(-A,0)$ исходного многообразия $C_f$ в третьей системе координат с центром в точке $(-2A,0)$, (для всего рисунка двух систем координат, сдвинутого налево а величину $A > 0$). Здесь мы находим $w_1 = w$ по $z$ как результат обратного отображения $z = g(w_1) = f_1(w_1)$ для такого «сдвинутого» многообразия для переменной $w_1$ в третьей системе координат с центром в $(-2A, 0)$, $g(w) = f(w - A)$.

Существование двух обратных отображений одновременно возможно только при периодичности с периодом $A$ аналитического выражения функции $z = f(p)$.

Теорема 2 доказана.

В теореме 3 с помощью примеров введения и теорем 1,2 доказано возможность аналитически продолжить аналитическую функцию $f(p)$ через границу ее аналитичности в условиях теоремы 1. В теореме 3 мы предполагаем, что функция $z = f(p)$ определена и аналитична в открытой области $G$, включающей в себя квадрат

$$K = \{p : 0 < Re\, p < 2A \bigcap -A < Im\, p < A\}$$

при некотором $A > 0$.

*Теорема 3*.

Функция $z = f(p)$ аналитичная в открытой области $G$, включающей в себя квадрат $K$, может быть аналитически продолжена через границу квадрата $Re\, p = 2A$ функцией $z = f(p - 2A)$, если обратная к ней функция $p = f^{(-1)}(z)$ является однозначной аналитической функцией $z$ в некоторой односвязной открытой области $ImG$, совпадающей с образом области $G$ при отображении $z = f(p), df(p)/dp \neq 0, p \in G.$

*Доказательство*.

Теорема является непосредственным следствием примера 1 введения, (можно также воспользоваться периодичностью исходной функции, доказанной в примере 2 введения и в теоремах 1, 2).

2. *Заключение*.

Пример 1 введения, относящийся к обратным функциям, по мнению автора является основной частью данной статьи. Применимость данных результатов к физическим задачам математической физики требует дальнейшего рассмотрения с точки зрения сравнения полей сдвигов с физически осуществимыми математическими моделями электромагнитных полей. Формально из результатов данной работы следуют все результаты статьи автора [4].

***Список литературы***

1. Павлов А.В. Отраженные функции и периодичность / А.В. Павлов // International Journal of Open Information Technologies. – 2022. – №6. – С. 33–39.

2. Павлов А.В. Отражение регулярных функций. Мат. физика и компьютерное моделирование / А.В. Павлов // Волгоград. гос. университет. – 2021 – №4. – С. 79–82.

3. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М: Наука, 1987.

4. Pavlov A.V. The regularity of the transform of Laplace and the transform of Fourier / A.V. Pavlov // Chebyshevskii sbornik. – 2020. – v. 21 №4. – P. 162–170.