(cc) BY

Шевченко Елена Николаевна
учитель
Клевцова Светлана Васильевна
учитель

ГБОУ «Шебекинская гимназия-интернат»
г. Шебекино, Белгородская область

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ ПО ТЕМЕ «УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. ФОРМУЛА БАЙЕСА»

Аннотация*: в статье представлены методические рекомендации организации уроков по теории вероятности в старшей школе. Авторами подробно рассматриваются примеры ознакомления учащихся с понятием условной вероятности. Приводятся формула Байеса и иллюстрации ее применения в ходе решения задач.*

Ключевые слова*: вероятность случайного события, условная вероятность, формула Байеса.*

Преподавание нового курса «Вероятность и статистика» для учащихся 7–8 классов в общеобразовательной школе является важной составляющей реализации нового Федерального государственного образовательного стандарта (ФГОС) по предмету «Математика». Этот курс позволяет учащимся получить не только фундаментальные знания в области математики, но и развить навыки анализа данных, логического мышления и принятия решений на основе вероятностных расчетов.

Одной из особенностей преподавания данного курса является акцент на практическом применении теории вероятностей и статистики. Учащиеся не только изучают основные понятия и методы данного предмета, но и активно применяют их на практике. Это достигается с помощью различных математических игр, задач, проектов и экспериментов, которые позволяют учащимся увидеть применение математики в реальной жизни.

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Учащиеся рассматривают различные ситуации из реальной жизни, в которых применяются принципы вероятности и статистики. Это позволяет им увидеть, как математика применима в различных областях науки, бизнеса и повседневной жизни, а также развивает их способность анализировать информацию и принимать обоснованные решения.

Условная вероятность является одним из важнейших понятий теории вероятностей.

Условная вероятность это – вероятность наступления события А при условии, что событие В произошло.

Вероятность события А, вычисленная в предположении, что событие В уже произошло, обозначается Р (А/В).

Рассмотрим задачу ЕГЭ на определение условной вероятности.

Пример 1. На фабрике керамической посуды 10% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Результат округлите до сотых.

Решение.

В задаче описана следующая ситуация: при производстве посуды часть тарелок имеют дефект. Но контроль качества отбраковывает не все дефектные тарелки, а только 80% из них, остальные (20%) поступают в продажу.

Нам нужно найти вероятность того, *что, случайно выбранная при покупке тарелка, не имеет дефектов.* То есть, нас интересует, какая часть из всех тарелок, которые поступили в продажу, не имеют дефекта.

Нарисуем дерево событий:

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

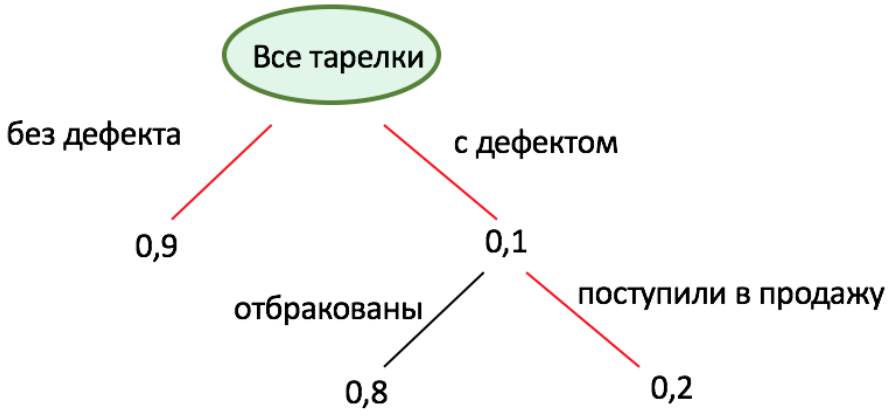


Рис. 1. Дерево событий

Красными веточками обозначены тарелки, которые поступили в продажу. Это: тарелки без дефектов (они составляют 0,9 от всех тарелок) и тарелки с дефектами, которые пропустила система контроля (их 0,1x0,2=0,02 от всех тарелок).

Таким образом, вероятность того, что тарелка поступила в продажу, равна 0,9+0,02=0,92. При этом вероятность того, что тарелка не имеет дефектов, равна 0,9.

Следовательно, вероятность того, что *случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов, равна* $\frac{0,9}{0,92}\approx 0,98$

Ответ: 0,98.

Пример 2. При двукратном бросании игральной кости в сумме выпало 5 очков. Какова вероятность того, что хотя бы раз выпало 1 очко.

Решение.

Мы находим вероятность того, что хотя бы раз выпало 1 очко при условии, что наступило событие, что при двукратном бросании игральной кости в сумме выпало 5 очков.

Перечислим все возможные исходы события, что выпало 5 очков. Пусть это будет событие А.

Возможны следующие варианты:

1+4; 4+1; 2+3; 3+2

Наше событие В заключается в том, что хотя бы раз выпало 1 очко, но рассматриваем мы его в предположении, что наступило событие А. Значит, благо-

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

приятные исходы для события B, если A наступило, это исходы 1+4 и 4+1. Таких исходов всего 2. Таким образом вероятность наступления события B, в предположении, что наступило A:

$P(B/A)=\frac{2}{4}=0,5$

Ответ: 0,5.

К сожалению, не все задачи можно решить по определению условной вероятности. Для решения более сложных задач используется формула Байеса. Томас Байес (1702–1763) – английский математик XVIII в. вошел в историю благодаря доказанной теореме.

Прежде чем привести формулу, позволяющую вычислить условную вероятность, проиллюстрируем это понятие с помощью кругов Эйлера:

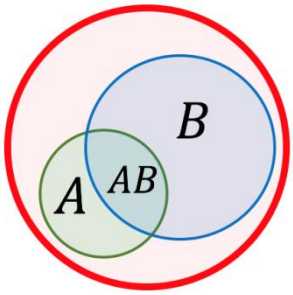


Рис. 2.

Пусть для некоторого эксперимента красный круг обозначает множество всех возможных исходов. Зеленый круг обозначает множество исходов, благоприятствующих событию A, синий круг обозначает множество исходов, благоприятствующих событию B, область, лежащая в пересечении этих кругов, обозначает множество исходов, благоприятствующих обоим событиям A и B, обозначим его AB.

Тогда формулу Байеса можно записать в следующем виде:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Рис. 3.

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Как мы знаем, вероятностью события называется отношение числа благоприятных исходов к числу всех возможных исходов.

То есть вероятность события показывает, какую часть благоприятные исходы составляют от всех возможных исходов.

Если мы вычисляем вероятность события А в предположении, что событие В уже произошло (то есть условную вероятность), то в этом случае для нас множество исходов, благоприятствующих событию В, окажется множеством всех возможных исходов, а благоприятными исходами будут те исходы, которые при этом еще благоприятствуют событию А. То есть нам нужно найти, какую часть число исходов, благоприятствующих событиям А и В составляет от числа исходов, благоприятствующих событию В.

Пример 1.

На рисунке показано дерево некоторого случайного эксперимента. Событию А благоприятствуют элементарные события a, b и c, а событию В благоприятствуют элементарные события b, c и d. Найдите условную вероятность события А при условии В, т.е. P(A/B)

Решение.

Изобразим дерево возможных вариантов:

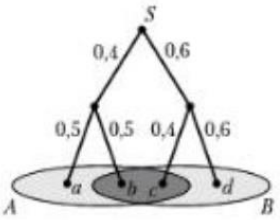


Рис. 4.

По формуле Байеса P(A/B) = $\frac{P(AB)}{P(B)}$. Наглядно видно, что P(AB)=0,4x0,5 + 0,6x0,4 =0,44; P(B) = 0,4x0.5 + 0,6x0,4 + 0,6x0,6 = 0,8. Тогда P(A/B) =$\frac{0,44}{0,8}$=0,55

Заметим, что аналогично получим формулу для нахождения вероятности наступления события В при условии, что событие А произошло:

P(B/A) = $\frac{P(AB)}{P(A)}$

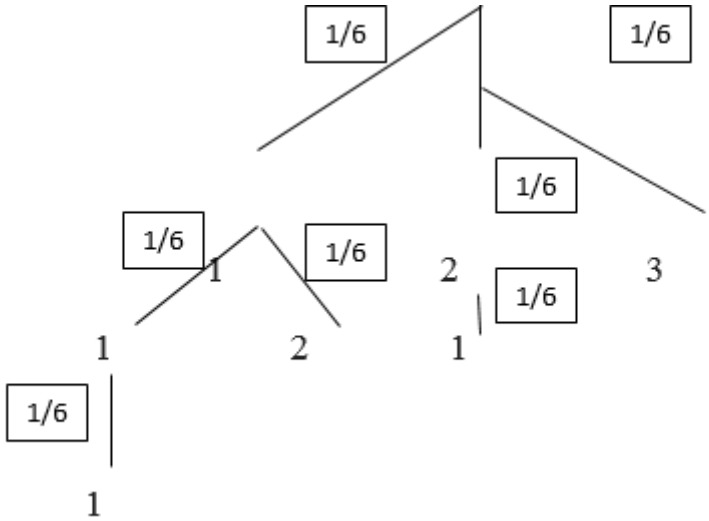
Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Очевидно, что P(A/B)≠ P(B/A)

Пример 2. Игральную кость бросили один или несколько раз. Оказалось, что сумма всех выпавших очков равна 3. Какова вероятность того, что был сделан один бросок? Ответ округлите до сотых.

Решение. Пусть событие А – это сумма выпавших очков равна 3, событие В, что был сделан 1 бросок при условии, что событие А уже наступило.

Построим дерево возможных вариантов и переберем все варианты при условии, что сумма выпавших очков равна 3, т.е. наступило событие А.



Вероятность В при условии А мы будем искать по формуле Байеса, т.е. вероятность того, что событие А и В наступило одновременно, делим на вероятность события А.

Для того, чтобы найти вероятность события А необходимо вспомнить правило работы с деревом.

$P(A)= 1/6^3 + 1/6^2 + 1/6^2 +1/6 = (1+6+6+36)/6^3= 49/6^3$

Вероятность того, что наступило событие А и В одновременно P(AB)=1/6.

Вернемся к формуле Байеса и вычислим условную вероятность $P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$:

$\frac{1}{6}:\frac{49}{6^3}=\frac{6^2}{49}=\frac{36}{49}\approx 0{,}73$

Ответ: 0,73

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Итак, преподавание нового курса «Вероятность и статистика» для учащихся 7–8 классов в общеобразовательной школе в рамках реализации нового ФГОС по предмету «Математика» представляет собой целенаправленный процесс, направленный на развитие математических знаний и навыков учащихся, а также их способности применять математику в реальной жизни. Использование практических задач, современных информационных технологий и связь с реальными примерами делает этот курс не только содержательным, но и интересным для учащихся.

Список литературы

1. Сборник задач по теории вероятностей математической статистике и теории случайных функций / под ред. А.А. Свешникова. – М.: Лань, 2007.

2. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей / В.П. Чистяков. – М.: Лань, 2008.

3. Колемаев В.А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / В.А. Колемаев, В.Н. Калинина. – М.: Юнити-Дана, 2009. – 352 с. EDN SDTBTJ

4. Нейросеть, пишущая тексты [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ichip.ru/tekhnologii/top-6-nejrosetej-kotorye-umeyut-pisat-teksty-828542

5. Условная вероятность. Формула Байеса [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ege-ok.ru/2021/07/26/uslovnaya-veroyatnost-formula-bajesa (дата обращения: 23.08.2023).

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)