УДК 51.75

DOI 10.21661/r-561469

Танюхин Алексей Владимирович

АКТУАРНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ТВИДИ К МОДЕЛИРОВАНИЮ РЕЗЕРВА УБЫТКОВ

Аннотация*: в статье рассмотрены проблемы резервирования убытков в страховании. Принимается во внимание, что популярная в практике актуарных расчетов резервов убытков модель цепной лестницы может быть обоснована обобщенной линейной моделью нормированных на экспозицию приращений убытков, имеющих распределение Пуассона, то есть другим теоретическим базисом. В качестве недостатка данного метода отмечается малая дисперсия пуассоновского распределения применительно к моделированию денежных сумм. В связи с чем предложено использовать в целях перекрестной параметризации модель нормированных на экспозицию приращений убытков, имеющих распределение Твиди. Показано, что распределение единицы риска по Твиди дает распределение среднего по Твиди, определены параметры распределения среднего. Также предложен алгоритм практической реализации оценки резерва убытков.*

Ключевые слова*: резерв убытков, обобщенная линейная модель, перекрестная параметризация, распределение Твиди, составное распределение Пуассона, моделирование средних.*

I. Предпосылки для применения Твиди-распределения к моделированию резервов убытков.

В работе [1] было показано, что оценка резерва убытков с использованием модели цепной лестницы может быть сведена к оценке с применением перекрестной параметризации на основе обобщенной линейной модели распределения Пуассона (1):

$$p(Z = z) = \frac{w^{wz}}{(wz)!} e^{w(z\theta - e^{\theta})}, \qquad (1)$$

где p – функция вероятности,

w – параметр веса, влияющий на размер дисперсии случайной величины Z.

Для практической реализации данного метода резервирования можно применить следующий алгоритм и программные средства.

1. Необходимо представить сгруппированные данные инкрементального треугольника развития убытков в виде табл. 1. Каждую строку таблицы назовем условно «ячейкой».

Таблица 1

Необходимая форма данных для построения обобщенной линейной модели

Период события (i)	Период развития убытков (j)	Экспозиция риска (wij)	Убыток на единицу экспозиции (zij)

2. Загрузить данную таблицу в среду R (или любую другую среду, позволяющую получать параметры обобщенных линейных моделей).

3. Использовать встроенную функцию построения обобщенных линейных моделей (в R это функция glm), указав в качестве моделируемого показателя убыток на единицу экспозиции, в качестве категориальных факторов – период события и период развития убытков, в качестве параметра веса – экспозицию, и выбрав семейство распределений Пуассона. В качестве экспозиции риска при этом могут браться различные меры объема от количества полисо-лет до заработанной премии.

4. Сделать таблицу вида табл. 1 для прогнозируемых периодов, в качестве экспозиции взяв экспозицию соответствующих периодов событий.

5. Выполнить расчет экспоненты прогноза по обобщенной линейной модели, выполненного в вычислительной среде (в R это функция predict), определив таким образом прогнозный ожидаемый убыток на единицу экспозиции. Сумма резерва для конкретного прогнозного периода событий и развития может быть получена умножением этого ожидаемого убытка на размер экспозиции в данном периоде.

Результат вычислений полностью совпадет с вычислениями по модели цепной лестницы на основе кумулятивного треугольника развития убытков.

В качестве недостатка данного подхода можно отметить малую дисперсию пуассоновского распределения и вообще физический смысл выбора этого распределения для моделирования денежных сумм.

II. Обобщенная линейная модель Твиди как модель резервов убытков.

Дальнейшие исследования применения обобщенных линейных моделей к решению задач резервирования убытков показали оправданность применения другого распределения вероятности: распределения Твиди (Tweedie), точнее его частного случая: составного пуассоновского распределения. Распределение Твиди трехпараметрическое. Третий параметр, который принято обозначать p, определяет распределение как составное пуассоновское $(1 < p < 2)$ [2, с.140], значение $p = 0$ соответствует нормальному распределению, $p = 1$ – распределению Пуассона, $p = 2$ – Гамма-распределению, $p = 3$ – обратному гауссовскому распределению.

Случайная величина Твиди непрерывна и имеет достаточно сложную форму представления плотности вероятности, поэтому ниже приводится выражение для производящей функции кумулянтов (натурального логарифма производящей функции моментов). В случае с составным пуассоновским распределением и фиксированным значением параметра p, таким что $1 < p < 2$, она имеет вид (2) [2, с. 132]:

$$\mathrm{K}_p(s;\theta,\lambda) = \lambda\kappa_p(\theta)\left\{\left(1+\frac{s}{\theta\lambda}\right)^{\alpha}\text{-}1\right\}, p \neq 1{,}2, \quad (2)$$

где K_p – производящая функция кумулянтов,

θ, λ – параметры распределения Твиди,

α – функция третьего параметра распределения p вида

$$\alpha = \frac{p\text{-}2}{p\text{-}1} \quad (3),$$

κ_p – единичная функция кумулянтов (unit cumulant function) вида

$$\kappa_p(\theta) = \frac{\alpha\text{-}1}{\alpha}\left(\frac{\theta}{\alpha\text{-}1}\right)^{\alpha}. \quad (4)$$

Математическое ожидание и дисперсия Твиди-распределенной случайной величины $1 < p < 2$ определяются (5) и (6) [2, с. 127, 131].

$$\mu = \tau(\theta) = (\frac{\theta}{\alpha\text{-}1})^{\alpha\text{-}1} = (\theta \cdot (1\text{-}p))^{1\text{-}p}, \ (5)$$

$$Var = \sigma^2\mu^p, \ (6)$$

где μ – математическое ожидание,

τ – функция математического ожидания от параметра θ (функция, обратная функции связи), определяемая однозначно для конкретного распределения, σ^2 – параметр дисперсии определяемый

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda}. \qquad (7)$$

С учетом (3), (5), (7) перепишем производящую функцию кумлуянтов распределения Твиди (5) в более удобном для дальнейшей работы виде (8), изменив параметризацию:

$$\mathrm{K}_p(s;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma^2}\kappa_p(\tau^{\text{-}1}(\mu))\left\{\left(1 + \frac{s\sigma^2}{\tau^{\text{-}1}(\mu)}\right)^{\frac{p\text{-}2}{p\text{-}1}}\text{-}1\right\}, p \neq 1{,}2. \qquad (8)$$

Теоретические основы применения обобщенных линейных моделей Твиди для параметризации «треугольников» убытков приводятся ниже.

Предположение 1. В рамках одной ячейки риска все единицы риска имеют одинаковое распределение Твиди с параметром p, μ, σ^2. Применительно к треугольнику развития убытков необходимо говорить об одинаковом распределении риска для всех единиц конкретных периода события и периода развития убытков.

Формализуя предположение 1:

$$X_i \sim Tw_p(\mu, \sigma^2), \qquad (9)$$

Утверждение 1. Средний убыток по всем единицам риска с учетом предположения 1 в рамках одной ячейки имеет распределение Твиди с параметрами p, μ, $\frac{\sigma^2}{w}$, где w – объем риска в ячейке (про ячейки подробнее, что имеется в виду!!!!!!)

Формализуя утверждение:

$$X_i \sim Tw_p(\mu, \sigma^2) \wedge Z = \frac{\sum_{i=1}^{w} X_i}{w} => Z \sim Tw_p\left(\mu, \frac{\sigma^2}{w}\right), \qquad (10)$$

Доказательство.

Пусть

$$Y = \sum_{i=1}^{w} X_i\,, Z = \frac{Y}{w}.$$

Производящая функция кумулянтов суммы случайных величин есть сумма производящих функций кумулянтов случайных величин.

Рассмотрим сумму производящих функций кумулянтов случайных величин всех единиц риска в ячейке (11):

$$\mathrm{K}_Y(s) = \sum_{i=1}^{w} \frac{1}{\sigma^2} \kappa_p(\tau^{\text{-}1}(\mu)) \left\{ \left(1 + \frac{s\sigma^2}{\tau^{\text{-}1}(\mu)}\right)^{\frac{p\text{-}2}{p\text{-}1}} \text{-}1 \right\} = \frac{w}{\sigma^2} \kappa_p(\tau^{\text{-}1}(\mu)) \left\{ \left(1 + \frac{s\sigma^2}{\tau^{\text{-}1}(\mu)}\right)^{\frac{p\text{-}2}{p\text{-}1}} \text{-}1 \right\}. \quad (11)$$

Далее воспользуемся определением производящей функции кумулянтов:

$$\mathrm{K}_{\frac{Y}{w}}(s) = \ln\left(E\left(e^{s\frac{Y}{w}}\right)\right) = \mathrm{K}_Y\left(\frac{s}{w}\right). \quad (12)$$

Таким образом, производящая функция кмулянтов случайной величины Z может быть записана в виде (13):

$$\mathrm{K}_Z(s) = \frac{w}{\sigma^2} \kappa_p(\tau^{\text{-}1}(\mu)) \left\{ \left(1 + \frac{s\frac{\sigma^2}{w}}{\tau^{\text{-}1}(\mu)}\right)^{\frac{p\text{-}2}{p\text{-}1}} \text{-}1 \right\}. \quad (13)$$

Функция (13) является производящей функцией кумулянтов распределения Твиди вида (8) с параметрами p, μ, $\frac{\sigma^2}{w}$.

Конец доказательства.

Доказательство данного утверждения позволяет положить в основу расчета резервов предположение о том, что убыток по каждой единице риска имеет распределение Твиди с параметром p, таким что $1 < p < 2$. При этом возможно применение обобщенных линейных моделей Твиди для перекрестной параметризации средних по ячейкам.

Для получения мультипликативной модели, как в случае с применением обобщенной линейной модели Пуассона, необходимо использовать логарифмическую функцию связи, то есть реализовать обобщенную линейную модель показателя $\ln(\mu)$. Каноническая функция связи, обратная функции τ из (5) для целей построения мультипликативной модели не подойдет.

Алгоритм практической реализации в этом случае похож на алгоритм реализации обобщенной линейной модели Пуасоона.

1. Необходимо представить сгруппированные данные инкрементального треугольника развития убытков в виде табл. 1.

2. Загрузить данную таблицу в среду R (или любую другую среду, позволяющую получать параметры обобщенных линейных моделей).

3. Использовать встроенную функцию построения обобщенных линейных моделей (в R это функция glm), указав в качестве моделируемого показателя убыток на единицу экспозиции, в качестве категориальных факторов – период события и период развития убытков, в качестве параметра веса – экспозицию, и выбрав семейство распределений Твиди (в R дополнительная библиотека statmod), определив логарифмическую функцию связи и параметр p. Оценка этого параметра является отдельной проблемой. Можно лишь сказать, что чем ближе его значение к 1, тем ближе распределение к Пуассону, чем ближе к 2, тем ближе к Гамма. В автостраховании, например, принято полагать, что параметр p близок к 1.2. В качестве экспозиции риска при этом могут браться различные меры объема от количества полисо-лет до заработанной премии.

4. Сделать таблицу вида табл. 1 для прогнозируемых периодов, в качестве экспозиции взяв экспозицию соответствующих периодов событий.

5. Выполнить расчет экспоненты прогноза по обобщенной линейной модели, выполненного в вычислительной среде (в R это функция predict), определив таким образом прогнозный ожидаемый убыток на единицу экспозиции. Сумма резерва для конкретного прогнозного периода событий и развития может быть получена умножением этого ожидаемого убытка на размер экспозиции в данном периоде.

Список литературы

1. Танюхин А.В. Актуарная оценка поздних убытков: модель цепной лестницы или обобщенная линейная модель нормированных приращений убытков, имеющих распределение Пуассона? / А.В. Танюхин // Интерактивная наука. – 2020. – №7 (53). – С. 87–91. DOI 10.21661/r-552020. EDN VWCBOK

2. Jorgensen B. The Theory of Dispersion Models. CHAPMAN & HALL. 1997

Танюхин Алексей Владимирович – канд. экон. наук, актуарий СРО «Ассоциация профессиональных актуариев», Россия, Москва.