УДК 514.01; 514.12.01

*DOI 10.21661/r-561506*

***Чемерис Владимир Дмитриевич***

***Чемерис Илья Андреевич***

***Чемерис Мирон Андреевич***

# ОТ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ ДУГ К ПОСТУЛАТУ ПРОКЛА

***Аннотация:*** *создав формулу кривизны концентрических дуг и задав значение кривизны ноль, убеждаемся, что дуги превращаются в прямые линии, а расстояние между прямыми в любом месте составляет постоянную величину. Это эквивалентно утверждению, что через точку можно провести только одну параллельную линию. Следовательно, главной геометрической теорией, по-прежнему, следует считать евклидову геометрию. Для неевклидовых геометрий, геометрии Лобачевского и геометрии Римана, остаются лишь второстепенные роли, как инструментов проективной геометрии.*

***Ключевые слова****: Постулат Лобачевского, параллельные прямые линии, Пятый постулат Евклида, Одиннадцатая аксиома Евклида, неевклидова геометрия, геометрия Лобачевского-Бойяи.*

I. *Формула кривизны эквидистанты*.

Возьмём два луча $f$ и $g$, выходящие из одной вершины $O$, а между лучами проведём дугу $l_д$ ($O$, $r_д$) с центром в точке $O$ и радиусом $r_д$, а затем дугу $l_э$ ($O$, $r_э$) с радиусом $r_э$ и с центром в той же точке (рис. 1).

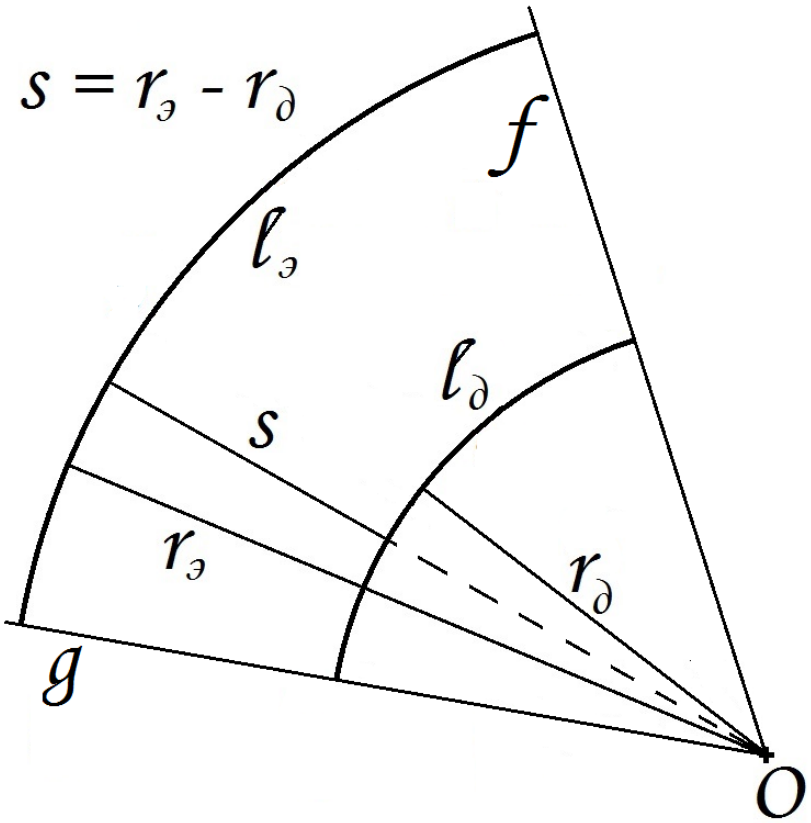


Рис. 1. Концентрические дуги

Получились *концентрические дуги*: дуги, имеющие единый центр кривизны. Причём, дуга $l_э$ равно расположена к дуге $l_д$. Дуга $l_э$ – *эквидистанта* дуги $l_д$. Промежуток $s$ между дугами – постоянная величина:

$$s = r_э - r_д.$$

Следует отметить, что длины радиусов $r_д$ и $r_э$ не могут иметь отрицательное значение.

Учитывая, что кривизна ($k$) – величина обратно пропорциональная радиусу, получаем зависимость между кривизной $k_д$ заданной дуги $l_д$, кривизной $k_э$ дуги-эквидистанты $l_э$ и промежутком $s$:

$$s = 1/k_э - 1/k_д.$$

Выразим кривизну $k_э$ через кривизну $k_д$:

$$1/k_э = 1/k_д + s,$$

$$k_э = 1/(1/k_д + s) = 1/[(1 + sk_д)/k_д] = k_д/(1 + sk_д),$$

Получаем *Формулу кривизны эквидистанты*:

$$k_э = k_д/(1 + sk_д),$$

где $k_э$ – кривизна эквидистанты,

$k_д$ – кривизна изначально заданной линии постоянной кривизны.

$s$ – промежуток между равно расположенными линиями постоянной кривизны.

В названии *Формулы* и в пояснениях мы намеренно избегаем термина *дуга*, потому что *Формула кривизны эквидистанты* справедлива для всех равнорасположенных линий постоянной кривизны. Она подходит для дуг, для окружностей и даже для прямых линий.

Учитывая начальные условия, применимость *Формулы* имеет границы. Так как радиус дуги может иметь только положительную величину, кривизна не может быть отрицательной. Но это не значит, что она не может быть равной нулю. И судя по полученной *Формуле*, если кривизна $k_д$ первой дуги равна нулю ($k_д$=0), то кривизна $k_э$ второй дуги тоже равна нулю:

$$k_э = 0/(1 + s0) = 0,$$

$$k_э = 0.$$

Если кривизна линии равна нулю, то это значит, что линия является прямой.

Итак, если задана прямая линия, то вторая линия (эквидистанта) тоже является прямой. В результате получили, что могут существовать две прямые линии, расположенные по всей своей длине на одинаковом расстоянии.

Неожиданным образом от дуг мы перешли к прямым линиям, и оказалось, что *прямые линии могут находиться на всём своём протяжении на одинаковом расстоянии*, то есть доказали *Постулат Прокла*. Доказательство *Постулата Прокла* свидетельствует о повсеместной справедливости *V-ого Постулата Евклида*, так как *Постулат Прокла* и *Постулат Евклида* эквивалентны [4, 298]. Утверждение справедливости *V-ого Постулата Евклида*, в свою очередь, подтверждает мнение: *евклидова геометрия* обладает приоритетом над другими геометрическими теориями. Другим теориям, *геометрии Лобачевского* и *геометрии Римана*, остаётся роль вспомогательных инструментов в *проективной геометрии*. Базовой же, по-прежнему, остаётся *геометрия Евклида*.

Но имеем ли мы право использовать *Формулу кривизны эквидистанты* для прямых? Ведь создавали мы формулу, как бы, для дуг, а между прямыми и ду-

гами очень большая разница. У прямой линии нет кривизны, нет выгиба, к ней невозможно провести касательные. Прямая не имеет центра кривизны и радиусов. И вообще, не дав никаких объяснений, мы вдруг стали называть разницу радиусов промежутком, а вторую дугу – эквидистантой.

Итак, чтобы ответить положительно на вопрос: применима ли *Формула* к прямым линиям, следует решить ряд задач. Необходимо доказать, что:

− маржа радиусов концентрических дуг равна промежутку между этими линиями;

− концентрические дуги равно расположены друг к другу;

− между прямой и дугой имеется определённая взаимосвязь;

− среди атрибутов прямой линии имеются аналоги радиусов, и с помощью этих аналогов определяется промежуток между равно отстоящими прямыми.

Задач предстоит решить много, и они достаточно ёмкие, поэтому решать их будем постепенно.

II. *Промежуток между концентрическими дугами*.

Разница между радиусами на всём протяжении концентрических дуг представляет собой постоянную величину. Такая радиальная разница равна расстоянию между дугами. Убедимся в этом.

*Теорема 1* «*О соответствии разницы радиусов промежутку между концентрическими дугами*».

*Дано*: концентрические дуги $l_д$ ($O$, $r_д$) и $l_э$ ($O$, $r_э$) с общим центром кривизны $O$ и радиусами $r_д$, $r_э$ (рис. 2).

*Доказать*: расстояние между концентрическими дугами по всей длине равно разнице радиусов.

*Доказательство*.

Обозначим маржу между радиусами буквой $s$. Из центра $O$ проведём луч $p$, пересекающий обе дуги. Дугу $l_д$ он пересекает в точке $A$, а дугу $l_э$ в точке $B$.

Определим расстояние от точки $A$ до дуги $l_э$, то есть найдём кратчайший отрезок, соединяющий дугу $l_э$ с точкой $A$.

Возьмём на дуге $l_э$ произвольно точку $G$ и соединим с точками $A$ и $O$. Образовался треугольник $AGO$. Используем *20-ое Предложения Евклида*: «Во всяком треугольнике две стороны, взятые вместе при всяком их выборе, больше оставшейся» [6, с. 32].

$$AO + AG > GO,$$

где $AO$, $AG$, $GO$ – стороны треугольника $AGO$.

Учитывая, что $AO=r_д$, $GO=r_э=r_д+s$, получаем:

$$r_д + AG > r_д + s,$$

$$AG > s.$$

Точка $G$ была взята произвольно, поэтому до любого участка дуги $l_э$ от точки $A$ отрезки будут длиннее $s$ – радиальной маржи, кроме отрезка $AB$. Отрезок $AB$, равный $s$, оказался самым коротким отрезком от точки $A$ до дуги $l_э$, поэтому следует считать, что разница радиусов $s$ соответствует расстоянию от точки $A$ до дуги $l_э$.

Теперь определим расстояние от точки $B$ до дуги $l_д$.

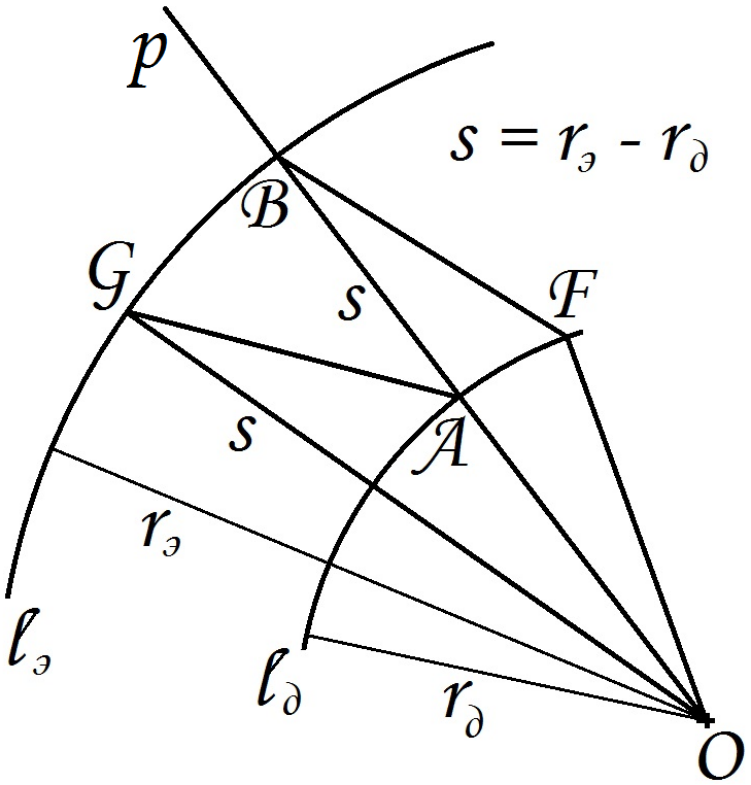


Рис. 2. Исследование длин отрезков между концентрическими дугами

Возьмём на дуге $l_д$ произвольно точку $F$, соединим её с точкой $B$ и центром кривизны $O$. Образовался треугольник $BFO$. Согласно того же *20-ого Предложения Евклида*, получается:

$$BF + FO > BO,$$

где $BF$, $FO$, $BO$ – стороны треугольника $BFO$.

Учитывая, что $FO=r_д$, $BO=r_э=r_д+s$:

$$BF + r_д > r_д + s,$$

$$BF > s.$$

Точка $F$ была взята произвольно на дуге $l_д$, поэтому до любого участка дуги $l_д$ от точки $B$ отрезки будут длиннее радиальной маржи $s$, кроме отрезка $AB$, равного $s$. Расстоянием от точки $B$ до дуги $l_д$ следует считать $s$.

Луч $p$ из центра кривизны $O$ был проведён произвольно, поэтому полагаем: в любом месте, что от дуги $l_д$ до дуги $l_э$, что от дуги $l_э$ до дуги $l_д$ расстояние равно $s$.

Изучение длин отрезков между концентрическими дугами позволяет сделать вывод, что расстояние от дуги до дуги равно разнице между длинами радиусов, причём, величина промежутка выдерживается по всей длине линий. Что и требовалось доказать. *Теорема 1* доказана.

Длина радиального отрезка оказалась *расстоянием взаимной расположенности* концентрических дуг. На всём протяжении дуг оно остаётся одним и тем же. Одна концентрическая дуга по отношению к другой является *эквидистантой*.

Таким образом, мы решили сразу две задачи, доказав, что:

− промежуток между концентрическими дугами определяется по разнице радиусов;

− концентрические дуги равно расположены друг к другу по всей длине.

Далее раскроем путь преобразования дуги в прямую линию.

III. *Линии постоянной кривизны*.

По *Формуле кривизны эквидистанты*, оказалось, можно просчитывать не только дуги, но и прямые. В этом нет ничего необычного, ведь рассматривае-

мые нами дуги относятся к линиям постоянной кривизны, а у прямых тоже постоянный коэффициент кривизны. Кроме того, если разгибать дугу, то есть уменьшать её кривизну, то, в конце концов, она непременно превратится в прямую.

Возьмём прямую $a$, на ней точку $A$ (рис. 3). Из точки $A$ проведём под прямым углом прямую $p$, используя *11-ое Предложение Евклида*: «К данной прямой из заданной на ней точки провести прямую под прямыми углами» [6, 24]. С центрами в точках $O_1$, $O_2$ и $O_n$, расположенными на прямой $p$ по одну сторону от прямой $a$, построим дуги $l_1$ ($O_1$, $r_1$), $l_2$ ($O_2$, $r_2$) и $l_n$ ($O_n$, $r_n$) с радиусами $r_1$, $r_2$ и $r_n$, равными $AO_1$, $AO_2$ и $AO_n$. Каждый следующий радиус больше предыдущего:

$$r_1 < r_2 < r_n.$$

Пусть $n$ принадлежит множеству действительных чисел $R$, и радиус $r_n$ больше, чем радиус $r_{n-1}$. Тогда при $n$, стремящемся к бесконечности, предел кривизны $k_n$ дуги $l_n$ равен 0. Выгиб дуги $l_n$ исчезает. Пределом для дуги $l_n$ будет прямая $a$.

Прямая $a$ является касательной ко всем дугам. При достижении предельного значения дуга $l_n$ налагается на прямую $a$, и прямая $a$ перестаёт быть касательной. У предела дуги $l_n$ касательных быть не может. Касательные превращаются в линии, совпадающие с $l_n$.

Соединим центры $O_1$, $O_2$ и $O_n$ с произвольно взятой точкой на прямой $a$, например, с точкой $F$, и сравним углы при точке $F$. Самым меньшим является угол $AFO_1$, средний угол – $AFO_2$, а самый большой – $AFO_n$.

Чем больше будет $n$, тем ближе величина угла будет приближаться к величине прямого угла. Следовательно, луч $FO_n$ будет в пределе подходить к прямой $a$ под прямым углом. Линия $FO_n$ становится перпендикуляром прямой $a$. Учитывая, что точка $F$ была взята произвольно, и линия $O_nF$ была радиальным лучом, и на нём помещались радиусы, то делаем вывод: в пределе радиусы дуги преобразуются в перпендикуляры.

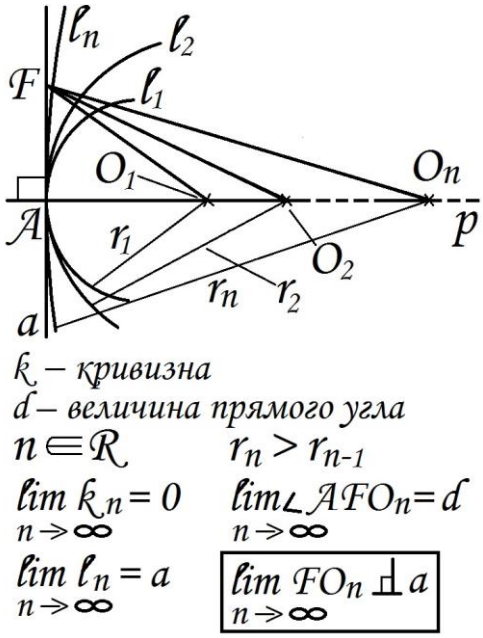


Рис. 3. Иллюстрация того, что при бесконечном уменьшении кривизны дуга стремится стать прямой, а радиус перпендикуляром к этой прямой

Итак, дуга превратилась в прямую, радиусы – в перпендикуляры, касательные исчезли совсем. Результаты расчётов по *Формуле кривизны эквидистанты* лишь дополняют общую картину: дуга-эквидистанта тоже превращается в прямую-эквидистанту, а радиальный отрезок между дугами-эквидистантами – в перпендикуляр между прямыми линиями. А значит, эквидистанта прямой линии является прямой линией, и в геометрии всегда справедлив *Постулат Прокла*: «… точки одинакового расстояния от данной прямой образуют опять-таки некоторую прямую» [4, с. 298].

У прямой линии есть перпендикуляры. Эти перпендикулярные линии обладают всеми свойствами радиальных линий, кроме одного. Они не сходятся в одну точку. Они совсем нигде не пересекаются, то есть параллельны между собой. Все остальные свойства, присущие радиусам, имеются у этих перпендикуляров. И если длина радиального отрезка от заданной дуги до дуги-эквидистанты соответствует промежутку между линиями (см. *Теорема 1*), то у прямой вместо радиусов есть перпендикуляры, и высота перпендикуляра от прямой до эквидистанты тоже равна промежутку между линиями. Убедимся в этом, доказав теорему о высоте перпендикуляра.

IV. *Промежуток между прямой и эквидистантой Лобачевского*.

Для любой дуги можно построить равно располагающуюся линию – дугу-эквидистанту. У прямых линий тоже могут быть эквидистанты. Эквидистанта прямой (*эквидистанта Лобачевского*) – «… геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии от данной прямой и лежащих по одну сторону этой прямой …» [5, с. 35]. Считается, что эквивалента Лобачевского представляет собой линию постоянной кривизны [5, с. 36]. Кроме того, перпендикуляры, поднятые от прямой до эквидистанты Лобачевского, равны величине промежутка между эквидистантой Лобачевского и прямой.

*Теорема 2* «*О соответствии высоты перпендикуляра промежутку между прямой и эквидистантой Лобачевского*».

*Дано*: прямая *a* и эквидистанта Лобачевского *c* с промежутком между ними *s* (рис. 4).

*Доказать*: в любом месте высота перпендикуляра, поднятого от прямой до эквидистанты Лобачевского, равна расстоянию между прямой и эквидистантой.

*Доказательство*.

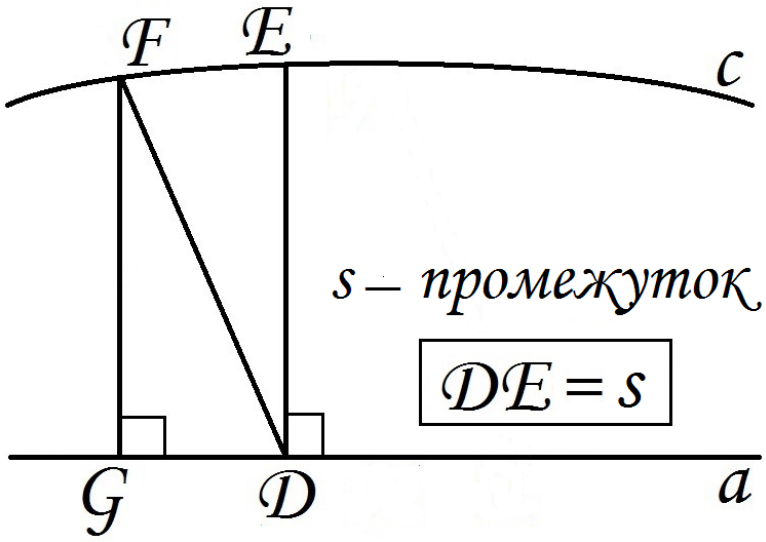


Рис. 4. Определение кратчайших отрезков между прямой и эквидистантой Лобачевского

Эквидистанта Лобачевского *c* равно расположена к прямой *a*, следовательно, от любой точки прямой *a* до эквидистанты *c* расстояние равно промежутку *s*.

Произвольно возьмём точку *D* на прямой *a* и точку *F* на эквидистанте *c*. Соединим эти точки и предположим, что отрезок *DF* равен промежутку *s* (*DF*=*s*). Из точки *F* можно опустить перпендикуляр на прямую *a*, в соответствии с *12-ым Предложением Евклида*: «К данной неограниченной прямой из заданной точки, на ней не находящейся, провести перпендикулярную линию» [6, с. 25]. В основании перпендикуляра точка *G*. Получен прямоугольный треугольник *DFG*.

В *Первой Теореме Лежандра-Саккери* доказано: «Сумма углов любого треугольника не может быть больше 2*d*» (*d* – величина прямого угла) [5, 9]. Следовательно, при наличии прямого угла в треугольнике остальные углы даже в сумме не больше величины прямого угла. Прямой угол *DGF* – самый большой в треугольнике *DFG*.

Гипотенуза *DF* больше других сторон, так как лежит напротив самого большого угла *DGF*, согласно *19-му Предложению Евклида*: «Во всяком треугольнике больший угол стягивается и большей стороной» [6, с. 31].

$$FG < DF,$$

так как *FG* – один из катетов треугольника *DFG*, а *DF* – гипотенуза.

Учитывая, что *DF*=*s*, получаем

$$FG < s.$$

Но *FG*, как отрезок от прямой *a* до эквидистанты *c*, не может быть меньше *s*. Он должен быть больше или равен *s*. Иначе, оказывается, что расстояние между линиями *a* и *c* возле точек *F* и *G* меньше *s*, заданного условиями.

Допущение, что отрезок *DF* равен промежутку *s*, было ошибкой.

Поднимаем перпендикуляр из точки *D* до эквидистанты *c*, используя *11-ое Предложение Евклида* [6, с. 24]. Вершина перпендикуляра – точка *E*. Проверим вариант, в котором самой близкой оказывается вершина *E* перпендикуляра *DE* (*DE*=*s*). Тогда, отрезок *DF*, как отрезок от прямой *a* до эквидистанты *c*, должен быть больше промежутка *s* (*DF*>*s*), а отрезок *FG*, будучи перпендикуляром к прямой *a*, также как *DE*, равен *s* (*FG*=*s*). В противном случае, мы получим ситуацию, в которой уже оказывались и описали чуть выше по тексту.

В треугольнике *DFG*, согласно *Первой теореме Лежандра-Саккери* и *19-ому Предложению Евклида*, наибольшая сторона *DF* – гипотенуза треугольника *DFG*, следовательно,

$$DF > FG.$$

И значит,

$$DF > s.$$

Противоречий в наших рассуждениях не выявлено.

Точка *F* могла быть любой точкой на эквидистанте *c*. Следовательно, от точки *D* до любой точки эквидистанты *c* дальше, чем до точки *E*. Между точками *D* и *E* пролегает кратчайший путь от точки *D* до эквидистанты *c*. Следовательно, отрезок *DE* равен промежутку *s*. При этом, отрезок *DE* перпендикулярен прямой *a*.

Точка *D* была взята произвольно. Следовательно, любой перпендикуляр к прямой *a* от эквидистанты *c* равен промежутку *s* между прямой *a* и эквидистантой *c*.

Расстояние в любом месте от прямой до эквидистанты соответствует длине перпендикуляра к прямой линии, построенного между этими линиями. Что и требовалось доказать. *Теорема 2* доказана.

Итак, если величину промежутка между дугами-эквидистантами можно определить по длине отрезка, расположенного на радиальной линии, то величину промежутка между прямой и эквидистантой Лобачевского – по длине отрезка от эквидистанты до прямой, расположенного на перпендикулярной линии.

Перпендикуляры к прямой выполняют такие же функции, как радиальные линии к дуге, и поэтому, совершенно закономерно, что высота перпендикуляра определяет промежуток между прямыми-эквидистантами, аналогично длине радиального отрезка между дугами-эквидистантами.

V. *Заключение*.

Все, высказанные в начале статьи, предположения были доказаны:

− прямая – это выпрямленная дуга;

− перпендикуляры при прямой линии аналогичны радиусам при дуге;

− перпендикуляры от прямой до равно расположенной к ней линии (эквидистанты Лобачевского) соответствуют радиальным отрезкам между концентрическими дугами;

− высота перпендикуляров, также как длина радиальных отрезков, равна размеру промежутка между линиями;

− прямая и эквидистанта Лобачевского, также как концентрические дуги, по всей длине равно расположены друг к другу.

Следовательно, можно сделать основной вывод.

*Формула кривизны эквидистанты* применима ко всем линиям постоянной кривизны – к дугам, окружностям и даже к прямым. Такие входные параметры, как коэффициент кривизны и промежуток между линиями, сохраняющие постоянную величину по всей длине линий, имеются у всех этих видов линий. А значит, линия, равно располагающаяся к прямой (эквидистанта Лобачевского), согласно *Формуле кривизны эквидистанты*, имеет коэффициент кривизны, равный нулю, то есть эквидистанта Лобачевского является прямой линией. А такой результат служит доказательством *Постулата Прокла*.

Следует отметить, что наше исследование проводилось на базе «абсолютной геометрии» [3, с. 23], то есть той части геометрии, которая является основой, как *евклидовой геометрии*, так и *неевклидовой* [2, с. 164]. Следовательно, в процессе работы мы находились вне действия той или иной точки зрения. Наше исследование было независимым ни от *геометрии Евклида*, ни от *геометрии Лобачевского*.

Доказав *Постулат Прокла*, мы опровергаем *Постулат Лобачевского* о возможности прохождения через точку не менее двух параллельных [1, с. 31] и *Допущение Римана* о невозможности провести через точку даже одну параллельную [7, 45], но, ни в коем случае, не отрицаем возможность существования *неевклидовой геометрии*. Это, кстати, вполне согласуется с представлениями Франца Адольфа Тауринуса – первооткрывателя *неевклидовой геометрии*: «Тауринусъ … получил формулы не-эвклидовой тригонометріи. … Но … онъ при-

знаетъ Эвклидову геометрію единственно истинной для физическаго пространства» [7, с. 43].

*Неевклидова геометрия* должна быть главным инструментом *проективной геометрии*. Особенно актуальным это станет, когда на практике возникнут проблемы сопряжения пространств с разной кривизной, или человечество достигнет некоторых областей нашего пространства, имеющих иную кривизну. Возможно ли физическое проникновение в такие области и пространства!? Может быть и нет. Но вот *проективная геометрия* в сочетании с *неевклидовой* помогут составить для нас некоторые представления о неведомых мирах с иной кривизной.

О том, что такое кривизна пространства, и как она себя проявляет, мы уже писали в предыдущей статье (DOI 10.21661/r-559645). Там, кстати, перечислены *Постулаты общей геометрии*, в которых закреплена преобладающая роль *геометрии Евклида* над любыми геометриями в любых пространствах.

В данной публикации доказан *Постулат Прокла*. Это доказательство первое, но не единственное. Предполагаем в следующей статье предоставить все известные нам способы доказательства этого *Постулата*.

***Список литературы***

1. Александров П.С. Что такое неэвклидова геометрия / П.С. Александров // Академия педагогических наук. Педагогическая библиотека учителя. – М.: Изд-во Академии педагогических наук РСФСР, 1950. – 71 с.

2. Атанасян С.Л. Геометрия 2: учебное пособие для вузов / С.Л. Атанасян, В.Г. Покровский, А.В. Ушаков; под ред. С.Л. Атанасяна. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2020. – 544 с.

3. Бахвалов С.В. Основания геометрии (главы высшей геометрии): учебное пособие для вузов / С.В. Бахвалов, В.П. Иваницкая. – Ч. 1. – М.: Высшая школа, 1972. – 280 с.

4. Клейн Ф. Неевклидова геометрия / Ф. Клейн, пер. Н.К. Ерушлинского. М.; Л.: Объединённое научно-техническое изд-во, 1936. – 356 с.

5. Кутузов Б.В. Геометрия Лобачевского и элементы оснований геометрии: пособие для учителей средней школы / Б.В. Кутузов. – М.: Гос. учебно-педагогическое изд-во Министерства просвещения РСФСР, 1950. – 127 с.

6. Начала Евклида. Книги I–VI. – М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. – 447 с.

7. Энрикес Ф. Начала геометрии // Новые идеи в математике. Сборник девятый. Непериодическое издание, выходящее под ред. заслуженного профессора А.В. Васильева / Ф. Энрикес. – СПб.: Образование, 1914. – 171 с.

---

**Чемерис Владимир Дмитриевич** – магистр техн. наук, инженер, Россия, Екатеринбург.

**Чемерис Илья Андреевич** – учащийся, средняя школа Вашингтон-Либерти, Соединённые Штаты Америки, Вашингтон,

**Чемерис Мирон Андреевич** – учащийся, средняя школа Кенмор, Соединённые Штаты Америки, Вашингтон.

---